Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE5 - 4 - **Intégrales à paramètres.**

Etude de $\int_a^b f(t,x)\,dt$ dans le cadre de l'intégrale de Riemann

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, E un espace de Banach, $a<b$ deux réels et $f:[a,b]\times U\to E$. On s'intéresse à la régularité de $\Phi:U\to E$ définie par $\Phi(x)=\int_a^b f(t,x)\,dt$.

Th. 1, Résultat de continuité : On suppose que f est continue sur $[a,b]\times U$. Alors Φ est continue sur U.

Th. 2, Résultat de dérivation : On suppose que $n=1$, que f est continue et admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable (ici x) telle que $\partial_x f$ soit continue sur $[a,b]\times U$. Alors Φ est de classe C^1 sur U et $\Phi'(x)=\int_a^b \partial_x f(t,x)\,dt$ pour tout $x\in U$.

Exercice 1 [Cours, Dvlpt] (Continuité et dérivation dans le cadre de Riemann)

1) On cherche à démontrer le Th. 1.

a) Rappeler la définition de l'uniforme continuité d'une application g entre deux espaces métriques (F,d) et (G,δ).

b) Soit $x\in U$ et V un voisinage compact de x dans U. Conclure en majorant $\|\Phi(x)-\Phi(y)\|$ pour y assez proche de x dans V.

2) On cherche à démontrer le Th. 2.

a) Rappeler l'inégalité des accroissements finis pour $g:[a,b]\to F$ avec F un e.v.n.

b) Soit $x\in U$ et $\alpha<\beta$ tels que $x\in[\alpha,\beta]\subset U$. Ecrire (après l'avoir justifié) l'uniforme continuité de $\partial_x f$ sur $[a,b]\times[\alpha,\beta]$.

c) A t fixé dans $[a,b]$, on définit $\Gamma_t(y)=f(t,y)-y\partial_x f(t,x)$. Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe $\eta>0$ tel que si $|x-y|\le\eta$, alors $\|\Gamma_t(x)-\Gamma_t(y)\|\le\varepsilon|x-y|$ pour tout $t\in[a,b]$.

En déduire une majoration de $\left\|\dfrac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}-\int_a^b \partial_x f(t,x)\,dt\right\|$ pour h assez petit, et conclure.

Exercice 2 (Calcul d'une intégrale)

On pose $G(x,y)=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln(x\sin^2\theta+y\cos^2\theta)\,d\theta$ pour $x,y>0$.

a) Calculer les dérivées partielles de G.

b) A y fixé, on pose $F(x)=G(x,y)$. Montrer que F est C^1 sur $]0,+\infty[$ et obtenir que $F(x)=2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})+C$ pour $x\neq y$ avec C une constante..

c) En déduire la valeur de $G(x,y)$ pour tout $x,y>0$.

Exercice 3 (Un exemple classique)

Soit $f\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On définit $G:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ par $G(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ si $x\neq 0$.

a) Quelle valeur faut-il pour $G(0)$ afin que G soit continue sur $[0,+\infty[$?

b) Exprimer G comme une intégrale dépendant du paramètre x et en déduire que G est C^∞ sur $[0,+\infty[$. Calculer $G^{(n)}(0)$.

Exercice 4 (Calcul de la Gaussienne)

Soit $g:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définit par $g(x)=\int_0^1 \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}\,dt$.

a) Montrer que g est C^1 et en déduire un calcul de $g(x)$ en fonction de $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

b) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Etude de $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)\,dt$ dans le cadre de l'intégrale de Riemann

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach, $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \times U \to E$. Soit $u, v : U \to]a,b[$.

On s'intéresse à la régularité de $\Phi : U \to E$ définie par $\Phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)\,dt$.

Th. 3, Résultat de dérivation : On suppose que f est continue et admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable (ici x) telle que $\partial_x f$ soit continue sur $[a,b] \times U$. On suppose de plus que u et v sont dérivables.

Alors Φ est de classe C^1 sur U et $\Phi'(x) = f(v(x),x)v'(x) - f(u(x),x)u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \partial_x f(t,x)\,dt$ pour tout $x \in U$.

Exercice 5 [Cours] (Dérivation avec bornes variables)

a) On cherche à démontrer le Th. 3. Soit $H :]a,b[^2 \times U \to E$ définie par $H(u,v,x) = \int_u^v f(t,x)\,dt$. Etudier les dérivées partielles de H. En déduire que H est différentiable sur $]a,b[^2 \times U$.

b) On pose $\theta(x) = (u(x), v(x), x)$. Exprimer Φ' en fonction de dH, θ et θ' et conclure.

c) Exemple : Calculer la dérivée de $F(x) = \int_0^{x^2} u(xt)\,dt$ avec u de classe C^1.

Exercice 6 (Exemple d'application)

Calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$. Pour cela, on posera $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$ que l'on dérivera sur $]0,1[$ et on étudiera la limite de $F(x)$ en 1.

Etude de $\int_a^b f(t,x)\,dt$ pour une intégrale généralisée

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, E un espace de Banach, $[a,b] \subset]-\infty,+\infty]$ et $f : [a,b[\times U \to E$. (On peut faire des études semblables pour $f :]a,b] \times U \to E$ avec $[a,b] \subset [-\infty,+\infty[$ et $f :]a,b[\times U \to E$ avec $[a,b] \subset \overline{\mathbb{R}}$.)

On s'intéresse à la régularité de $\Phi : U \to E$ définie par $\Phi(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt$.

Th. 4, Résultat de continuité (via CVU) : On suppose que f est continue sur $[a,b[\times U$ et que pour tout compact K de U, $\int_a^\beta f(t,x)\,dt$ converge vers $\Phi(x)$ uniformément sur K quand $\beta \to b$.

Alors Φ est continue sur U.

Th. 4 bis, Résultat de continuité (via Domination) : On suppose que f est continue sur $[a,b[\times U$ et qu'il existe une fonction positive g telle que $\int_a^b g$ converge et vérifiant $\|f(t,x)\| \leq g(t),\ \forall (t,x) \in [a,b[\times U$.

Alors Φ est bien définie et est continue sur U.

Th. 5, Résultat de dérivation (via CVU) : On suppose que $n = 1$, que f est continue et admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable (ici x) telle que $\partial_x f$ soit continue sur $[a,b[\times U$. On suppose que pour tout $x \in U$, $\Phi(x)$ converge et que pour tout compact K de U, $\int_a^\beta \partial_x f(t,x)\,dt$ converge uniformément sur K quand $\beta \to b$.

Alors Φ est de classe C^1 sur U et $\Phi'(x) = \displaystyle\int_a^b \partial_x f(t,x)\,dt$ pour tout $x \in U$.

Th. 5 bis, Résultat de dérivation (via Domination) : On suppose que $n = 1$, que f est continue et admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable (ici x) telle que $\partial_x f$ soit continue sur $[a,b[\times U$. On suppose que pour tout $x \in U$, $\Phi(x)$ converge et qu'il existe une fonction positive g telle que $\int_a^b g$ converge et vérifiant $\|\partial_x f(t,x)\| \leq g(t),\ \forall (t,x) \in [a,b[\times U$.
Alors Φ est de classe C^1 sur U et $\Phi'(x) = \displaystyle\int_a^b \partial_x f(t,x)\,dt$ pour tout $x \in U$.

Remarque : On a rarement des majorations par une fonction g valables sur tout U. Comme la continuité et la dérivation sont des propriétés locales, il suffit d'avoir cette majoration localement pour conclure.

Exercice 7 [Cours, Dvlpt] (Continuité et dérivabilité pour les intégrales généralisées à paramètre)

1) On cherche à démontrer les théorèmes 4 et 4bis.

a) Montrer le théorème 4.
b) On se place maintenant dans les hypothèses du théorème 4 bis. Montrer que Φ est bien définie sur U.
c) Pour $b_n \to b$ avec $a < b_n < b$, montrer que $\displaystyle\int_a^{b_n} f(t,x)\,dt$ converge uniformément sur U vers $\displaystyle\int_a^b f(t,x)\,dt$ et conclure.

2) Montrer de même les théorème 5 et 5 bis.

Exercice 8 (Calcul d'une intégrale)

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\,dt$.

a) Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $F''(x) - F(x)$ est constante pour $x > 0$.

b) En déduire $F(x)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,dt$.

Exercice 9 (Calcul d'une intégrale II)

Pour $x > 0$, on pose $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}\,dt$.

a) Montrer que G est bien définie, puis que G est dérivable sur $]0,+\infty[$. Calculer $G'(x)$.

b) En déduire la valeur de G, puis celle de $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt$ pour $a, b > 0$.

Remarque : l'intégrale $I(a,b)$ peut aussi se calculer à l'aide de la première formule de la moyenne (voir Gourdon).

Exercice 10 (Calcul d'une intégrale III)

Calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)\,dt$. (Etudier F'.)

Exercice 11 (Avec Cauchy uniforme)

Pour $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ décroissante, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{ixt^2} f(t)\,dt$. Montrer que F est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.

Exercice 12 [Dvlpt] (Fonction Gamma)

On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$. Montrer que Γ est bien définie et C^∞ sur $]0,+\infty[$.

Remarque 1 : c'est une fonction ultra classique qu'il faut connaitre. Il est nécessaire de savoir montrer les propriétés suivantes : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *pour* $x > 0$, Γ *est convexe,* $\ln \Gamma$ *est convexe,* $\Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$, *il existe* $c \in]1,2[$ *tel que* $\Gamma'(c) = 0$, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, *allure du graphe de* Γ.

Remarque 2 : Le développement issu de cette feuille consiste en la preuve du 2) de l'exercice 1 du 2) de l'exercice 7 et de l'exercice 12. Il est bien de savoir montrer les propriétés de la remarque 1 pour tout développement qui concerne la fonction Γ.

Etude de $\displaystyle\int_a^b f(t,x)\,dt$ dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue

On rappelle les résultats suivants qui sont des conséquences du théorème de convergence dominée.

Soit (X,d) un espace métrique, $x_0 \in X$, $(T, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $f : T \times X \to \mathbb{R}$.
On s'intéresse à la régularité de $\Phi : X \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = \displaystyle\int_T f(t,x)\,d\mu(t)$.

Th. 6, Résultat de continuité : On suppose que

i) pour tout $x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est $\mu-$ intégrable,
ii) pour presque tout $t \in T$, f est continue au point x_0 par rapport à la variable x,
iii) il existe $g \in L^1_\mu$ tel que $|f(t,x)| \leq g(t)$, $\forall x \in X$, p.p. $t \in T$.

Alors Φ est continue en x_0.

Th. 7, Résultat de dérivation : On suppose que X est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et que

i) pour tout $x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est $\mu-$ intégrable,
ii) pour presque tout $t \in T$, f admet sur X une dérivée partielle en x_0 par rapport à x,
iii) il existe $g \in L^1_\mu$ tel que $|\partial_x f(t,x)| \leq g(t)$, $\forall x \in X$, p.p. $t \in T$.

Alors $t \mapsto \partial_x f(t,x_0) \in L^1_\mu$, Φ est dérivable en x_0 et $\Phi'(x_0) = \displaystyle\int_T \partial_x f(t,x_0)\,d\mu(t)$.

Exercice 13 (Utilisation de la convergence dominée)

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2+x}\,dt$.

1) Existence de $F(x)$ sur $]0,+\infty[$? Limite de $F(x)$ en $+\infty$?

2) a) Soit $A > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\displaystyle\int_\delta^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt \geq A+1$.

b) Etudier la limite quand $x \to 0^+$ de $\displaystyle\int_\delta^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2+x}\,dt$.

c) Conclure sur la limite de $F(x)$ lorsque $x \to 0^+$.

Etude de $\displaystyle\int_a^b f(t,x)\,dt$ pour les fonctions holomorphes

Th. 8 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : T \times \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

i) pour tout $z \in \Omega$, $t \mapsto f(t,z)$ est $\mu-$ intégrable,
ii) pour presque tout $t \in T$, $z \mapsto f(t,z) \in \mathcal{H}(\Omega)$,
iii) pour tout compact K de Ω, il existe $g \in L^1_\mu$ tel que $|f(t,z)| \leq g(t)$, $\forall z \in K$, p.p. $t \in T$.

Alors $z \mapsto \Phi(z) = \displaystyle\int_T f(t,z)\,d\mu(t)$ est holomorphe sur Ω et $\Phi'(z) = \displaystyle\int_T \partial_z f(t,z)\,d\mu(t)$.

Exercice 14 (Pourquoi hypothèse sans dérivée)

1) Montrer que pour tout compact K de Ω, il existe $\delta > 0$ tel que $K_\delta = \{z \in \mathbb{C}\,,\, d(x,K) \leq \delta\} \subset \Omega$

2) Montrer que pour tout $z \in K$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|\partial_z f(t,z)| \leq \frac{1}{\delta}{}_{w\in K_\delta} |f(t,w)|.$$

(On pensera à la formule de Cauchy.) Que peut-on remarquer ?

<u>Annexe 1 :</u> Méthode de Laplace

On s'intéresse au comportement quand $x \to +\infty$ de la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^b e^{-x\varphi(t)} f(t)\, dt$, où $\varphi : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ avec $0 \leq a < b \leq +\infty$, $f : [a,b[\to \mathbb{C}$ continue en a, $f(a) \neq 0$, et telle qu'il existe $x_0 \geq 0$ telle que $e^{-x_0\varphi} f$ soit Lebesgue-intégrable sur $[a,b[$.

Exercice 15 (Méthode de Laplace)

1) On prend $\varphi(t) = t^2$, $a = 0$. Montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \dfrac{f(0)}{\sqrt{x}}$. (On coupera l'intégrale en deux et sur $[0,\alpha]$, on appliquera la convergence dominée.)

2) Soit $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$. Montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2\varphi''(a)}} \dfrac{e^{-x\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{x}}$.
(Changement de variable $\varphi(t) = \varphi(a) + y^2$.)

3) Application : donner un équivalent quand $x \to +\infty$ de $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x\, dt$. (Changement de variables : $t = (1+u)x$.)

<u>Annexe 2 :</u> Méthode de la phase stationnaire

On s'intéresse au comportement quand $x \to +\infty$ de la fonction $F(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{ix\varphi(t)} a(t)\, dt$, où $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $a \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Le résultat va dépendre des points où φ' s'annule. En ces points la phase $e^{ix\varphi(t)}$ ne "tourne" plus assez vite pour permettre à l'intégrale de s' "annuler", et ces points vont donc apporter la contribution la plus importante.
1) Dans le cas où il n'y a pas de telles singularités : On suppose donc que $\varphi' \neq 0$ sur le support de a (en dehors l'intégrale est nulle). On montre que dans ce cas pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe C_N tel que, pour $x \geq 1$, $|F(x)| \leq \dfrac{C_N}{x^N}$.
2) Dans le cas d'une singularité : On suppose qu'il existe un unique t_0 dans le support de a tel que $\varphi'(t_0) = 0$ et $\varphi''(t_0) \neq 0$. On montre que dans ce cas il existe $(A_N)_N$ indep. de x tel que, pour tout $N, F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{A_n\, e^{ix\varphi(t_0)}}{x^{n+1/2}} + R_N(x)$, pour $x \geq 1$, avec $|R_N(x)| \leq \dfrac{C_N}{x^{N+3/2}}$, pour $x \geq 1$. En particulier, on a $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{A_0\, e^{ix\varphi(t_0)}}{\sqrt{x}}, \quad A_0 = \dfrac{\sqrt{2\pi} e^{i\,\sigma\pi/4}}{\sqrt{|\varphi''(t_0)|}} a(t_0), \quad \sigma = \operatorname{sgn}(\varphi''(t_0))$.

Ces résultats sont prouvés dans Zuily-Quéffelec et sont techniques (ils utilisent aussi la transformée de Fourier, le prolongement analytique et la formule de Taylor). On va traiter seulement un exemple :

Exercice 16 (Phase stationnaire sur un exemple)

Soit $\alpha \in]0, \sqrt{\pi/2}[$. On s'intéresse au comportement quand $n \to +\infty$ de la fonction $I_n = \displaystyle\int_0^\alpha e^{in\varphi(t)} a(t)\, dt$, où $\varphi(t) = \sin(t^2)$, $a(t) = \sin(t)$.

a) Montrer que φ' s'annule en un unique point de $[0,\alpha]$.

b) Montrer que $\dfrac{a}{\varphi'}$ et $\left(\dfrac{a}{\varphi'}\right)'$ ont des limites finies lorsque x tend vers 0.

c) Etablir un lien entre I_n et $J_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} \left(\frac{a}{\varphi'}\right)'(x) e^{in\varphi(x)}\,dx$.

d) Montrer que $J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et conclure.

Bibliographie : Chambert-Loir, tome 1 (ex 16), Gourdon (ex 4, ex 6 et remarque ex 12), Pommellet (ex 1, ex 7 th 4 bis et th 5), Précis d'analyse-géométrie, tome 7 (ex 2 et 3), Ramis, Odoux, Deschamps, tome 4 (ex 5), Rouvière (ex 7 th 5 bis, ex 12 et ex 15), Zuily, Queffélec (ex 6 th 4, ex 9, ex 11 et ex 14).

Remarque : D'autres séances feront intervenir les intégrales à paramètres, à savoir les séances sur la transformation de Fourier, la transformation de Laplace, Prolongement de la fonction Γ *d'Euler, ...*