Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE5 - 6 - **Séries de Fourier.**

Pour $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p_{per}(]0, 2\pi[)$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ (modulo l'égalité presque partout) telles que $\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx < +\infty$ et telles que $x \mapsto f(x + 2\pi) - f(x)$ est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$ (c'est la condition de 2π-périodicité dans le cadre des fonctions définies à égalité presque partout près). Le lecteur définira $L^\infty_{per}(]0, 2\pi[)$ de façon analogue. Muni du produit scalaire $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$, $L^2_{per}(]0, 2\pi[)$ est un espace de Hilbert.

Les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L^1_{per}(]0, 2\pi[)$ sont définis, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$. La série de Fourier est $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$.

Les sommes partielles de la série de Fourier sont $S_N(f)(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$.

Notons $e_n(x) = e^{inx}$. Dans le cas d'une fonction $f \in L^2_{per}(]0, 2\pi[)$, $c_n(f) = (f \mid e_n)$.

Si $f, g \in L^1_{per}(]0, 2\pi[)$, on définit le produit de convolution selon $f * g(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x - t)g(t)\, dt$.

Prologue Montrer que si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ est T-périodique et localement intégrable, alors $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt$.

Exercice 1 (Règles de calcul)

1) Soit $f \in L^1_{per}(]0, 2\pi[)$ et $g \in L^\infty_{per}(]0, 2\pi[)$. Montrer que

a) $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$ avec $\check{f}(t) = f(-t)$,

b) $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$,

c) $c_n(\tau_a f) = e^{ina}c_n(f)$ avec $\tau_a f(t) = f(t + a)$,

d) $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)$,

e) $f * e_n = c_n(f)e_n$,

f) si f est de plus continue et C^1 par morceaux, alors $c_n(f') = inc_n(f)$.

2) Soit $f, g \in L^1_{per}(]0, 2\pi[)$. Montrer que $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.

Exercice 2 (Lemme de Riemann-Lebesgue via les translations)

Nous allons montrer que pour $f \in L^1_{per}(]0, 2\pi[)$, alors $c_n(f) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

1) Posons $\tau_a(f) = f(\cdot - a)$ et $T_f(a) = \tau_a(f)$ application de $\mathbb{R}$ dans $L^1_{per}(]0, 2\pi[)$. En utilisant la densité des fonctions continues dans $L^1_{per}(]0, 2\pi[)$, montrer que T_f est uniformément continue.

2) Après avoir montré que $2|c_n(f)| \leq \|f - \tau_{\pi/n}(f)\|_1$, conclure.

Exercice 3 (Noyaux trigonométriques)

1) Noyau de Dirichlet. Posons $D_N = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e_n$. Montrer que

a) D_N est pair et $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} D_N(t)\, dt = 1$,

b) $D_N(x) = \dfrac{\sin((N + 1/2)x)}{\sin(x/2)}$,

c) $S_N(f) = f * D_N$ pour tout $f \in L^1_{per}(]0, 2\pi[)$,

d) $\|D_N\|_1 \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

2) Noyau de Féjer. Posons $K_N = \dfrac{D_0 + \cdots + D_{N-1}}{N}$. Montrer que

a) $K_N = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)$ et $\|K_N\|_1 = 1$,

b) $K_N(x) = \dfrac{1}{N} \left(\dfrac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \geq 0$,

c) $\sigma_N(f) = f * K_N$ pour tout $f \in L^1_{per}(]0, 2\pi[)$ avec $\sigma_N(f) = \dfrac{S_0(f) + \cdots + S_{N-1}(f)}{N}$,

d) $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Exercice 4 (Convergence des noyaux)

1) En utilisant le 1)d) de l'exercice 2, montrer qu'il existe f continue et 2π-périodique pour laquelle la série de Fourier diverge en 0.

2) Montrer que si f continue et 2π-périodique, alors $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \underset{N \to +\infty}{\to} 0$. C'est le Théorème de Féjer. (S'inspirer de la preuve de Weierstrass par convolution.)

3) En déduire que si $f \in L^p_{per}(]0, 2\pi[)$ avec $1 \leq p < +\infty$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\|\sigma_N(f) - f\|_p \underset{N \to +\infty}{\to} 0$.

Exercice 5 (Application du Théorème de Fejer)

1) Montrer que les polynômes trigonométriques sont denses dans les fonctions continues 2π-périodiques muni de la norme usuelle.

2) Soit f continue et 2π-périodique. Si $(S_N(f)(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l, montrer que $l = f(x)$.

3) Soit f continue et 2π-périodique telle que $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$. Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ (f peut être développée en série de Fourier).

4) Montrer que $\{x \mapsto e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base Hilbertienne de $L^2_{per}(]0, 2\pi[)$, et donc que $\forall f \in L^2_{per}(]0, 2\pi[)$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$, cette inégalité signifiant $\|S_N(f) - f\|_2 \underset{N \to +\infty}{\to} 0$. Noter en particulier que $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2$ (Parseval).

5) Soit f continue, 2π-périodique et C^1 par morceaux, montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$.

6) Soit $f, g \in L^1_{per}(]0, 2\pi[)$, montrer que $f = g$ p.p. si et seulement si $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout n.

On peut également montrer le Théorème de Weierstrass à partir de celui de Féjer.

Exercice 6 (Théorème de Dirichlet)

Soit $f \in L^1_{per}(]0, 2\pi[)$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Supposons que f admet une limite à gauche f^- et à droite f^+ en x_0.

1) Supposons de plus dans cette question qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\displaystyle\int_0^\delta \frac{|f(x_0 + t) - f^+|}{t} dt < +\infty$ et $\displaystyle\int_0^\delta \frac{|f(x_0 - t) - f^-|}{t} dt < +\infty$, montrer qu'alors $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f^+ + f^-}{2}$.

2) Supposons que f admet une dérivée à gauche et à droite, alors montrer que $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f^+ + f^-}{2}$.

Exercice 7 (Exemples de développements)

1) Que deviennent les coefficients $c_n(f)$ et la série de Fourier si f est paire ou impaire ?

2) Soit f 2π-périodique et paire telle que $f(x) = 1$ si $0 \leq x < \pi/2$ et $f(x) = -1$ si $\pi/2 < x \leq \pi$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

3) Soit f 2π-périodique et impaire telle que $f(x) = x - \pi$ si $0 < x < \pi$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

4) Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et f 2π-périodique telle que $f(t) = e^{iat}$ pour $-\pi \leq t < \pi$. Quelle formule donne le Théorème de Dirichlet ?

Exercice 8 (Régularité et décroissance des coefficients)

1) Montrer que si f est de classe C^k, alors $\displaystyle\lim_{|n| \to +\infty} n^k c_n(f) = 0$.

2) Pour $k \geq 2$, montrer que si $c_n(f) = O(|n|^{-k})$, alors $f \in C^{k-2}$.

Exercice 9 (Phénomène de Gibbs)

Soit f 2π-périodique qui vaut 1 sur $[0, \pi[$ et -1 sur $[-\pi, 0[$.

1) Calculer la série de Fourier de f.

2) Soit $S_n(x) = \displaystyle\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$. Montrer que S_n a des extrema relatifs en tous les $k\pi/(2n)$ pour $1 \leq k \leq 2n$.

3) Montrer que le maximum de S_n sur $[0, \pi/2]$ est atteint en $x = \pi/(2n)$.

4) Montrer que la suite $S_n(\pi/(2n))$ est décroissante et calculer sa limite l. Montrer que $l > 1$. Commentaire ?

Exercice 10 (Inégalité isopérimétrique)

1) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 telle que $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$. Montrer que $4\pi^2 \displaystyle\int_0^1 |f|^2 \leq \int_0^1 |f'|^2$.

2) On considère une courbe fermée de classe C^1 dans le plan, de longueur l et A l'aire qu'elle enserre. Montrer que $l^2 \geq 4\pi A$. Cas d'égalité ? Interprétation ?

Exercice 11 (Inégalité de Bernstein)

1) Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ un polynôme trigonométrique de degré $\leq n$. On suppose que f s'annule en $2n+1$ réels distincts de $[0, 2\pi[$. Montrer que $f = 0$.

2) Soit f un polynôme trigonométrique de degré $\leq n$ tel que $f'(0) = \|f'\|_\infty > n\|f\|_\infty$. Soit $g(x) = \displaystyle\frac{1}{n}\|f'\|_\infty \sin(nx) - f(x)$. Montrer que g s'annule en $2n$ réels distincts de $[0, 2\pi[$, puis que g' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[0, 2\pi]$ et que g'' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[0, 2\pi[$. Obtenir une contradiction.

3) En déduire l'inégalité de Bernstein : tout polynôme trigonométrique de degré $\leq n$ vérifie $\|f'\|_\infty \leq n\|f\|_\infty$.

Références : Chambert-Loir, Faraut, Willem, Zuily