Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE5 - 9 - **Prolongement uniformément continue.**

Exercice 1 (Un théorème de prolongement)

Nous allons prouver le résultat suivant :

Soit (E,d) et (F,δ) des espaces métriques avec F complet. Soit X une partie de E dense dans E et $f : X \mapsto F$ une application uniformément continue. Alors il existe une unique application $g : E \mapsto F$ continue telle que $g_{|X} = f$. De plus, g est uniformément continue.

1) Montrer l'unicité.

2) Montrer qu'une application uniformément continue transforme toute suite de Cauchy en une suite de Cauchy.

3) Posons $g(x) = f(x)$ si $x \in X$ et $g(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n)$ où $a_n \in X$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$. Montrer que cette définition a bien un sens.

4) Montrer que g est uniformément continue sur E.

5) Application 1 : En déduire la construction de l'Intégrale de Riemann des fonctions réglées.

6) Application 2 : En déduire la construction de la Transformée de Fourier en une application linéaire continue sur L^2.

Exercice 2 (Théorème des droites droites)

Soit f une fonction holomorphe sur la bande $\Omega = \{z \in \mathbb{C}\,;\, 0 < \mathcal{R}ez < 1\}$ et continue et bornée dans $\overline{\Omega}$. Pour $\theta \in [0,1]$, posons $M(\theta) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(\theta+it)|$. Nous allons montrer que

$$M(\theta) \leq M(1)^\theta M(0)^{1-\theta}.$$

Supposons que f n'est pas identiquement nul sinon le résultat est évident. Soit $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) \neq 0$.

1) Soit $F(z) = e^{\varepsilon z^2 + \lambda z} f(z)$ où $\varepsilon > 0$ et $\lambda = \ln(M_0/M_1) - \varepsilon$ avec $M_0 > 0$ (resp. $M_1 > 0$) et plus grand que $M(0)$ (resp. $M(1)$). Soit $R_\varepsilon \geq 1/\sqrt{\varepsilon}$ tel que $\varepsilon R_\varepsilon^2 > \varepsilon + |\lambda| + \ln \|f\|_{\infty,\overline{\Omega}} - \ln |F(z_0)|$ et $Q_\varepsilon = \{z \in \Omega\,;\, |\mathcal{I}mz| < R_\varepsilon\}$. Montrer que, pour tout $z \in Q_\varepsilon$,

$$|F(z)| \leq \max\left(\sup_{|t|\leq R_\varepsilon} |F(it)|, \sup_{|t|\leq R_\varepsilon} |F(1+it)|\right).$$

2) Qu'en déduit-on sur f ? Faire tendre ε vers 0 pour conclure.

Exercice 3 (Application du Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin)

Les résultats des exercices 1 et 2 permettent de montrer le Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin :

Soit T une application linéaire continue de $L^{p_0}(X)$ dans $L^{q_0}(X)$ et de $L^{p_1}(X)$ dans $L^{q_1}(X)$ de normes respectives $\|T\|_0$ et $\|T\|_1$. Alors pour tout $\theta \in]0,1[$, T se prolonge en une application linéaire continue $\tilde{T}$ de $L^p(X)$ dans $L^q(X)$ où $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$ et $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$ de norme $\|\tilde{T}\|_\theta \leq \|T\|_0^{1-\theta}\|T\|_1^\theta$.

La preuve de ce résultat est assez longue (cf Zuily). Donnons deux applications de ce Théorème.

1) Montrer que l'on peut prolonger la Transformée de Fourier en une application linéaire continue sur L^p. avec $1 < p < 2$.

2) Soit $1 \leq p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $T(g) = f * g$. Montrer que T est une application linéaire continue de $L^{p'}$ dans L^∞ et de $L^1(X)$ dans $L^p(X)$. Qu'en déduit-on par Riesz-Thorin ?

Références : Gourdon, Madère, Zuily