Licence 3 de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Equations différentielles, Fiche 2

Exponentielle de matrice et systèmes linéaires constants d'équations différentielles.

Exercice 1 (Méthode de variation de la constante pour le cas scalaire d'ordre 1)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes en utilisant la méthode de variation de la constante.

$$\begin{array}{ll} 1) & y' - y = t, \\ 2) & y' + 2y = e^t, \\ 3) & y' + ty = t, \\ 4) & y' + y = \cos(t), \\ 5) & y' + y = e^{-t}. \end{array}$$

Exercice 2 (Base de solutions)

Pour $t > -1/2$, considérons l'équation différentielle suivante

$$(2t+1)x'' - (4t^2+1)x' - (4t^2+2t+2)x = 0.$$

Montrer que $x_1(t) = e^{-t}$ et $x_2(t) = e^{t^2}$ sont deux solutions indépendantes de cette équation différentielle. En déduire toutes les solutions sur $]-1/2, +\infty[$.

Exercice 3 (Systèmes 2×2)

Résoudre dans $\mathbb{K}$ les systèmes d'équations différentielles suivants

$$1) \left\{ \begin{array}{l} x' = x + 3y, \\ y' = 4x + 2y, \end{array} \right. \qquad 2) \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x - 5y, \\ y' = 2x - 4y, \end{array} \right. \qquad 3) \left\{ \begin{array}{l} x' = 5x - y, \\ y' = x + 3y, \end{array} \right.$$

en calculant des exponentielles de matrices.

Exercice 4 (Systèmes 3×3)

Résoudre dans $\mathbb{K}$ les systèmes d'équations différentielles suivants

$$1) \left\{ \begin{array}{l} x' = y - 2z, \\ y' = -2x + 3y - 2z, \\ z' = -2x + y, \end{array} \right. \qquad 2) \left\{ \begin{array}{l} x' = x + 2y - z, \\ y' = y + z, \\ z' = -y + z, \end{array} \right.$$

en calculant des exponentielles de matrices.