Licence 3 de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Equations différentielles, Fiche 3

Systèmes linéaires et ordre n constant.

Exercice 1 (Système d'ordre 2)

Résoudre dans $\mathbb{K}$ le système d'équation différentielle suivant

$$\begin{cases} x'' - 5x' - 2y' - 2y = 0, \\ y'' + 3x' - 3x - y = 0, \end{cases}$$

en calculant une exponentielle de matrice.

Exercice 2 (Exemple où $e^{A+B} \neq e^A e^B$)

Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ avec $\theta \neq 0$. Montrer que $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Exercice 3 (Ordre 2 scalaire)

Résoudre dans $\mathbb{K}$ les équations différentielles

1) $y'' - y' - 2y = 0,$
2) $y'' + 2y' + 2y = 0,$
3) $y'' - 4y' + 4y = 0,$
4) $y'' + 2y' + y = 0,$ avec pour conditions initiales $y(0) = 1, y'(0) = 0,$
5) $y'' - 2y' + 10y = 0,$ avec pour conditions initiales $y(0) = 0, y'(0) = 1,$
6) $y'' - 3y' = 0,$ avec pour conditions initiales $y(1) = 1, y'(1) = 6,$
7) $y'' + y = 0,$ avec pour conditions aux limites

a) $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, b) $y(0) = 1$, $y(\pi) = 1$, c) $y(0) = 1$, $y(2\pi) = 1$.

Exercice 4 (Ordre n scalaire)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles

1) $y^{(3)} - 2y'' - 5y' + 6y = 0,$
2) $y^{(3)} - 2y'' - 7y' - 4y = 0,$
3) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0,$
4) $y^{(4)} - y^{(3)} + 4y'' - 4y' = 0,$
5) $y^{(5)} - 4y^{(4)} + 4y^{(3)} = 0.$

Exercice 5 (Système 2×2 avec second membre)

Résoudre dans $\mathbb{K}$ les systèmes d'équations différentielles suivantes

$$1) \begin{cases} x' = 2x - y - 5t, \\ y' = 3x + 6y - 4, \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x' = -y + \cos t - t, \\ y' = -x - \sin t. \end{cases}$$

Pour le premier système, en calculant une exponentielle de matrices. Pour le second système, en se ramenant à une équation sur x.