Licence 3 de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Equations différentielles, Fiche 7
Lemme de Gronwall et Théorème des bouts.

Exercice 1 (Cauchy-Lipschitz, cadre Lipschitz ?)

Etudier les différentes équations différentielles suivantes. On s'intéressera à
a) l'existence/unicité de solutions maximales,
b) l'expression éventuelle de ces solutions.

1) $y' = |y|$ avec la condition initiale $y(0) = y_0$.

2) $y' = \sqrt{y}$ avec la condition initiale $y(0) = y_0$ ($y_0 \geq 0$).

Exercice 2 (Fonctions Lipschitziennes)

1) Montrer que la fonction $f(y) = \cos\sqrt{|y|}$ est Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f(x, y) = ax + by$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la plus petite constante de Lipschitz possible pour f avec les normes 1 et ∞ sur $\mathbb{R}^2$.

3) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = (|x|, 1 + x)$ est Lipschitzienne (avec par exemple la norme 1 sur $\mathbb{R}^2$).

Exercice 3 (Variantes sur le lemme de Gronwall)

1) Commencer par rappeler l'énoncé et la preuve du lemme de Gronwall vu en cours.

2) Soit $T > 0$, a une fonction continue sur $[0, T]$ et u, v des fonctions continues sur $[0, T]$ avec $v \geq 0$. On suppose que

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t u(s)v(s)\, ds.$$

Montrer que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t a(s)v(s)e^{\int_s^t v(\sigma)\, d\sigma}\, ds.$$

Exercice 4 (Inégalité de stabilité)

1) Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 telle que pour tout $t \geq 0$,

$$\|u'(t)\| \leq L\|u(t)\| + M$$

avec $L > 0$. Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$\|u(t)\| \leq \|u(0)\|e^{Lt} + \frac{M}{L}(e^{Lt} - 1).$$

2) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Soit y une solution de $y' = f(t, y)$ pour $t \geq 0$ telle que $y(0) = y_0$ et $\tilde{y}$ une solution de $\tilde{y}' = \tilde{f}(t, \tilde{y})$ pour $t \geq 0$ telle que $\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$. On suppose que pour tout $t \geq 0$ et $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^N$,

$$\|f(t, x) - \tilde{f}(t, x)\| \leq M$$

et

$$\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| \leq L\|x - \tilde{x}\|.$$

Obtenir l'estimation de la différence entre y et $\tilde{y}$ suivante, pour $t \geq 0$,

$$\|y(t) - \tilde{y}(t)\| \leq \|y(0) - \tilde{y}(0)\|e^{Lt} + \frac{M}{L}(e^{Lt} - 1).$$

Quelle peut être l'interprétation de cette inégalité ?

Exercice 5 (Solutions globales, cadre Lipschitz)

Soit $]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f :]a, b[\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.
Si on suppose qu'il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que $\|f(t, y)\| \leq C_1\|y\| + C_2$ pour tout $(t, y) \in]a, b[\times\mathbb{R}^N$, alors montrer que toute solution maximale de $y' = f(t, y)$ est globale.

Exercice 6 (Equation de Bernoulli et mathématiques financières)

En simplifiant le modèle de mathématiques financières de Cox, Ingersoll et Ross, il vient l'équation différentielle $y'(t) = \sigma\sqrt{y(t)}b'(t) + \kappa(\theta - y(t))$ avec $\sigma, \kappa > 0$, $y(t)$ modélise l'évolution des taux d'intérêt à cours terme, le paramètre θ étant la moyenne à long terme, $\kappa > 0$ la vitesse à laquelle le processus tend vers l'équilibre. Nous supposons que la fonction $t \mapsto b(t)$ est de classe C^1 et telle que $b(t)/t \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. Résoudre cette équation pour $\theta = 0$ et montrer que la solution obtenue vérifie $\sqrt{y(t)}/t \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.

(Indication pour la limite : pour $\varepsilon > 0$, on prendra $T > 0$ tel que $|b(t)| \leq \varepsilon t$ pour $t \geq T$ et on majorera différemment $\int_0^T \frac{1}{t}b(s)e^{\frac{1}{2}\kappa(s-t)}\,ds$ et $\int_T^t \frac{1}{t}b(s)e^{\frac{1}{2}\kappa(s-t)}\,ds$ pour $t \geq T$.)