Licence 3 de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Equations différentielles, Fiche 8

Développements en séries des équations différentielles.

Exercice 1 (Exemple avec abaissement de l'ordre)

On cherche à résoudre $(\mathcal{E}) : ty'' + 2y' + \omega^2 ty = 0$.

1) Par la technique du développement en série entière, obtenir une solution que l'on notera y_1.

2) Posant $y(t) = y_1(t)z(t)$, quelle équation différentielle vérifie z ? La résoudre et en déduire les solutions réelles de $(\mathcal{E})$.

Exercice 2 (Exemple avec second membre)

Résoudre $(1 + 2t)y' + 4y = \dfrac{-2}{1 + 2t}$ avec la condition de Cauchy $y(0) = 0$ en recherchant les solutions développables en séries entières.

(On vérifiera en particulier que les coefficients vérifient $a_n = n(-2)^n$.)

Exercice 3 (Exemple avec méthode de Frobenius, cas 1)

Résoudre l'équation différentielle réelle $t^2y'' + (t^2 + t/2)y' + ty = 0$. Pour cela, on cherchera des solutions sous la forme $y(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Exercice 4 (Exemple avec méthode de Frobenius, cas 2)

Résoudre l'équation différentielle réelle $t^2y'' - ty' - \left(\frac{5}{4} + 8t + 4t^2\right) y = 0$.

Pour cela, on cherchera des solutions sous la forme $y(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer.

On vérifiera en particulier que $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ est solution de la relation de récurrence obtenue.

Exercice 5 (Exemple avec méthode de Frobenius, cas 3)

Résoudre l'équation différentielle réelle $t^2y'' - t(1 - t)y' + y = 0$. Pour cela, on cherchera des solutions sous la forme $y(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Exercice 6 (Un peu de non-linéaire)

Soit l'équation différentielle $y'' = e^t y^2 - (y')^2$. Supposons que la solution avec les conditions de Cauchy $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ soit développable en série entière, alors donner les 5 premiers termes du développement.