Licence 3 de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Equations différentielles, Fiche 9

Champs de vecteurs, équations autonomes et intégrales premières.

Exercice 1 (Champs de vecteurs)

Dessiner le champ de vecteurs pour les systèmes suivants

$$\begin{cases} x' = y - x \\ y' = y + x \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = y - x - 1 \\ y' = x^2 + y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = y^4 - xy \\ y' = x + y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x^4 - x - y \\ y' = x^3 + x^2 - 2x - y \end{cases}.$$

Exercice 2 (Intervalle d'existence des solutions)

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1 avec $f > 0$.

1) Montrer que $G(z) = \displaystyle\int_{y_0}^{z} \frac{1}{f(u)}\, du$ est une bijection de $[y_0, +\infty[$ sur $[0, \displaystyle\int_{y_0}^{+\infty} \frac{1}{f(u)}\, du[$.

2) En déduire que la solution maximale y de $y' = f(y)$ telle que $y(t_0) = y_0$ est définie sur $]T_*, T^*[$ avec $T^* = t_0 + \displaystyle\int_{y_0}^{+\infty} \frac{1}{f(u)}\, du$.

3) Montrer de même que $T_* = t_0 - \displaystyle\int_{-\infty}^{y_0} \frac{1}{f(u)}\, du$.

4) Application : Déterminer l'intervalle d'existence des solutions maximales de $y' = \sqrt{y^2 + 1}$, $y' = y^3 + 1$, $y' = (1 + y^2)^2$, $y' = 2 + \sin y + \cos y$.

Exercice 3 (Intégrales premières)

Trouver une intégrale première pour les équations différentielles suivantes :

$$a)\, y''(2y' + y) + y'(y' + 2y) = 0,\ b)\, y'' = 6y^2 - 2y,\ c) \begin{cases} x' = -xy^2 \\ y' = -yx^2 \end{cases},\ d) \begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = x + 2y \end{cases}.$$

Exercice 4 (Hamiltoniens)

Les systèmes suivants sont-ils Hamiltoniens ? Si oui, préciser un Hamiltonien.

$$a) \begin{cases} x' = -y \\ y' = x(1 + y) \end{cases},\ b) \begin{cases} x' = -x - y^2 \\ y' = y + x^2 \end{cases},\ c) \begin{cases} x' = x + y + xy \\ y' = x + xy^4 + 2xy^2 \end{cases},\ d) \begin{cases} x' = 2xy + 2y - 2x^2 \\ y' = 4xy - y^2 - 4x^3 \end{cases}.$$

Exercice 5 (Equation d'énergie)

Soit $q : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, strictement positive et croissante. Montrer que toutes les solutions maximales de $y'' + q(t)y = 0$ sont définies et bornées sur $\mathbb{R}^+$. (Pour la borne, on cherchera une quantité conservée dépendant de t, y et y'.)