Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
L2 - Analyse 3 - Fiche 1 - **Séries, intégrales, fonctions monotones.**

Exercice 1 (Étude de séries)

Étudier la nature des séries de termes généraux suivants :

$$a)\, a_n = \frac{n^3+n^2-2}{2n^3-4n+1}, \quad b)\, b_n = \frac{\sin n}{n^2}, \quad c)\, c_n = \frac{3n+2}{n^3+4\ln n+1}, \quad d)\, d_n = e^{-\sqrt{n}},$$

$$e)\, e_n = \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}, \quad f)\, f_n = \frac{n!}{n^n}, \quad g)\, g_n = \frac{(n+1)(n+2)...(2n)}{(2n)^n}, \quad h)\, h_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

Exercice 2 (Étude de séries avec développement limité)

Étudier la nature des séries de terme général

$$a)\, a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}, \quad b)\, b_n = \sqrt[3]{n^3+\alpha n} - \sqrt{n^2+\beta}, \quad c)\, c_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}}\right),$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 3 (Calcul de primitives et d'intégrales)

1) Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto x^2 \ln x, \quad f_2 : x \mapsto \ln x, \quad f_3 : x \mapsto \frac{1}{1+\sqrt{x}}, \quad f_4 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}.$$

2) Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx, \quad J = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \, dx.$$

3) Calculer les intégrales généralisées suivantes :

$$K = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \, dx, \quad L_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx, \quad M(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2} \, dx,$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$. Pour cette dernière, on calculera d'abord la valeur pour $\alpha = 1$ et on fera le changement de variable $x = 1/y$.

Exercice 4 (Fonctions monotones)

1) Déterminer les intervalles maximaux sur lesquels la fonction $f(x) = x^5/5 - x^3 + x^2$ est croissante et ceux sur lesquels elle est décroissante.

2) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. Est-ce que le point fixe est nécessairement unique ?

Indication : pour montrer l'existence du point fixe, on commencera par poser $A = \{x \in [0,1]\,;\, f(x) \le x\}$ et montrer l'existence de α la borne inférieure de cet ensemble A.

Exercice 5 (Comparaison séries-intégrales)

En utilisant la technique de comparaison séries-intégrales, déterminer un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de chacune des suites définies par

$$a)\, A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad b)\, B_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}, \quad c)\, C_n = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}, \quad d)\, D_n = \sum_{k=1}^{n} k \ln k.$$

Exercice 6 (Fonctions lipschitziennes)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \text{pour tous } x, y \in I.$$

1) Montrer que si la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne, alors f est continue sur I.

2) Supposons que $I = [a, b]$ et que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^1. Montrer que f est lipschitzienne sur I.

3) Montrer que la fonction valeur absolue est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que la fonction racine carrée n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$.