Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
L2 - Analyse 3 - Fiche 3 - **Suites de fonctions.**

Exercice 1 (Convergences simple et uniforme)

Soient les suites de fonctions définies par

$$1)\ f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad 2)\ g_n(x) = \frac{2x + n^2x^3}{1 + n^2x^2}, \quad 3)\ h_n(x) = \frac{\sin x}{n^2},$$

$$4)\ u_n(x) = x\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \frac{x^2}{n}, \quad 5)\ v_n(x) = ne^{-n^2x^2} \quad \text{et} \quad 6)\ w_n(x) = nx^2e^{-nx}.$$

Étudier la convergence simple de ces suites de fonctions puis leur convergence uniforme sur l'ensemble de convergence simple ou à défaut sur les intervalles compacts de cet ensemble.

Exercice 2 (Étude des variations)

Soit la suite de fonctions définie par la relation

$$f_n(x) = \frac{nxe^{-nx}}{1 + e^{-nx}}.$$

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer que le signe de la dérivée de f_n en un point x est le même que celui de la fonction

$$u_n(x) = 1 - nx + e^{-nx}.$$

En étudiant le tableau de variations de la fonction f_n établir que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

3) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 3 (Approximation polynomiale de l'exponentielle)

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = (1 + x/n)^n$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto e^x$.

2) Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{C}$ par

$$g_n(z) = (1 + z/n)^n$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers $f : z \mapsto e^z$.

3) Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = (1 - x/n)^n\, \mathbb{1}_{x\in[0,n[}$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : x \mapsto e^{-x}$.

Exercice 4 (Fonctions lipschitziennes et convergence uniforme)

Soient $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et des fonctions $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit k un réel strictement positif.

On suppose que les fonctions f_n sont k-lipschitziennes pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose de plus que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur $[a, b]$. Montrer que la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur $[a, b]$.