Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
L2 - Analyse 3 - Fiche 4 - **Séries de fonctions.**

Exercice 1 (Convergences simple, uniforme et normale)

Soient les séries de fonctions définies par le terme général :

$$1)\ f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad 2)\ g_n(x) = \frac{x}{n^2}, \quad 3)\ h_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2},$$

$$4)\ w_n(x) = nx^2 e^{-nx}, \quad 5)\ u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

Étudier la convergence simple de ces séries de fonctions puis les convergences normales et uniformes sur l'ensemble de convergence simple ou à défaut sur des sous-ensembles bien choisis de cet ensemble.

Exercice 2 (Continuité et dérivabilité de séries de fonctions)

Étudier la continuité, puis la dérivabilité des séries de fonctions définies par le terme général :

$$1)\ f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^3}, \quad 2)\ g_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}, \quad 3)\ h_n(x) = -\frac{x}{n(1+n^2x)}, \quad 4)\ u_n(x) = nxe^{-x\sqrt{n}}.$$

Pour la question 3), on fera l'étude pour $x \geq 0$.

Exercice 3 (Calcul de la somme d"une série de fonctions à l'aide de la dérivation)

Soit la fonction F définie comme la somme de la série de fonctions

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \qquad \text{où } f_n(x) = \frac{1}{n}\cos^n x \sin nx.$$

1) Étudier la convergence uniforme des séries de fonctions $\sum f_n$ et $\sum f_n'$ sur les intervalles $[a, \pi - a]$ pour tout $a \in]0, \pi/2[$.
2) Montrer que

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos^{n-1}(x)\cos((n+1)x)$$

pour des valeurs de x que l'on précisera.
3) Simplifier l'expression précédente et en déduire une expression de la somme F.

Exercice 4 (Interversion d'une somme et d'une intégrale)

Montrer que

$$\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

On supposera connue l'égalité

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.