Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
L2 - Analyse 3 - Fiche 6 - **Séries de Fourier.**

Exercice 1 (Fonctions périodiques)

1) Soit f la fonction paire et 2π-périodique définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = x^3$. Déterminer la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique et continue. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$

Exercice 2 (Fonctions continues, dérivables, C^1 par morceaux)

1) Dessiner le graphe des fonctions puis étudier la continuité, la continuité par morceaux, la dérivabilité par morceaux et le caractère C^1 par morceaux des fonctions suivantes :
a) f est 2π-périodique, $f(x) = x^2$ pour $x \in [0,\pi]$, $f(x) = -x$ pour $x \in]-\pi, 0[$,
b) g est 2π-périodique, $g(x) = \sin x$ pour $x \in [0,\pi[$, $g(x) = \cos x$ pour $x \in [-\pi, 0[$,
c) h est 2π-périodique, $h(x) = e^{-x}$ pour $x \in [0,\pi[$, $h(x) = e^{x}$ pour $x \in [-\pi, 0[$,
a) i est 2π-périodique, $i(x) = x - \pi$ pour $x \in]0,\pi[$, $i(x) = (x+\pi)^2$ pour $x \in]-\pi, 0[$ et $i(0) = 0$.

2) Calculer $f(5)$, $f(-5)$, $h(8)$ et $h(14)$.

Exercice 3 (Coefficients de Fourier)

1) Retrouver les relations entre les coefficients de Fourier trigonométriques et les coefficients de Fourier exponentiels.

2) Calculer les séries de Fourier trigonométriques associées aux fonctions 2π périodiques suivantes :
a) $f(x) = \pi - x$ pour $0 < x \leq \pi$ et f impaire.
b) $g(x) = \pi - x$ pour $0 \leq x \leq \pi$ et g paire.

Exercice 4 (Exemples de série de Fourier)

1) Soit f la fonction de période 2π, égale à $\frac{\pi - x}{2}$ sur $]0, 2\pi]$.
a) Calculer la série de Fourier de f.
b) Montrer l'égalité suivante :

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n},$$

en précisant pour quelle valeur de x cette égalité est vraie.

2) Soit f la fonction paire, de période 2π, égale à $(\pi - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \pi$.
a) Calculer les coefficients de Fourier de f.
b) Montrer que la série de Fourier de f est convergente en x de somme $f(x)$.
c) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 5 (Coefficients exponentiels)

Soient $\alpha > 0$ et f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^{\alpha x}$ pour $x \in [0, 2\pi[$.
1) Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f.
2) Déterminer la série de Fourier de f et préciser la valeur de la somme de cette série pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 (Application aux calculs de sommes)

Soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = x(2\pi - x)$ pour $x \in [0, 2\pi[$.

1) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

2) Montrer que

$$f(x) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Calculer les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$