Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
L2 - Analyse 3 - Fiche 7 - **Intégrales à paramètres.**

Exercice 1 (Intégrale à paramètre sur un intervalle borné)

Étudier la continuité puis le caractère C^1 des fonctions suivantes :

$$F(x) = \int_0^1 \cos(t^2 + x^2)\, dt, \quad G(x) = \int_0^1 \frac{\sin(tx)}{1+t}\, dt.$$

Exercice 2 (Intégrale à paramètre sur un intervalle non borné)

1) Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la continuité et le caractère C^1 des fonctions suivantes :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{1+t^3}\, dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} t \cos t e^{-xt}\, dt.$$

2) Étudier la continuité puis le caractère C^1 sur $]0, +\infty[$ de la fonction

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + x^2}\, dt.$$

On pourra commencer par l'étude sur des intervalles $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 3 (Intégrale de Gauss)

Soit la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}\, dt.$$

1) Montrer que F est de classe C^1 et obtenir une expression de $F'(x)$ en fonction de

$$G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

2) En déduire que la fonction $H = F + G^2$ est constante.

3) Montrer que $F(x)$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$ et conclure à la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

Exercice 4 (Calcul avec la dérivée)

Soit la fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t}\, dt.$$

1) Montrer que la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3) Calculer F' et en déduire une expression explicite de F.

Exercice 5 (Avec une équation différentielle)

Soit la fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-t^2}\, dt.$$

1) Montrer que la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que F est solution de l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{2}xy = 0.$$

4) En déduire une expression explicite de F.