DEUG MIAS 2ème année, Analyse, Semestre 1,
Feuille 1 (Révisions), Année 2004-2005.

Exercice 1 (Primitives)

Calculer les intégrales définies suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx,\ B = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^3}\,dx,\ C = \int_{-1}^{1} e^{-2x+1}\,dx,\ D = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx,\ E = \int_0^2 \frac{x^3}{2+x^4}\,dx.$$

Exercice 2 (Fractions rationnelles)

Calculer les intégrales définies suivantes :

$$F = \int_1^a \frac{1}{x(x+1)}\,dx,\ G = \int_2^3 \frac{1}{x^2-5x+4}\,dx,\ H = \int_0^{-1} \frac{1}{x^3-3x+2}\,dx.$$

Exercice 3 (Changements de variable)

Calculer les intégrales définies suivantes :

$$I = \int_1^3 x\sqrt{x-1}\,dx,\ J = \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx, K = \int_0^4 \frac{1}{e^x+1}\,dx.$$

Exercice 4 (Intégrations par parties)

Calculer les intégrales définies suivantes :

$$L = \int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx,\ M = \int_0^1 \frac{x+1}{e^x}\,dx,\ N = \int_0^1 x2^x\,dx,\ O = \int_1^e \ln x\,dx, P = \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Exercice 5 (Approche de l'intégrale généralisée)

Soit (C) la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$. Soit $\mathcal{A}(X)$ l'aire délimitée par la courbe (C), l'axe Ox et les droites d'équations $x = 2$, $x = X$ avec $X > 2$. Ecrire $\mathcal{A}(X)$ sous la forme d'une intégrale. Quelle est la limite de $\mathcal{A}(X)$ lorsque $X \to +\infty$.

Même question avec $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

Lien entre $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathcal{A}(X)$ finie et $f(X) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$?

Exercice 6 (Suites)

1) Etudier la convergence des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ suivantes :

$$a)\ u_n = \frac{n^5+n^3}{n^5+n^2+1},\ b)\ u_n = \frac{\sin n}{n^2},\ c)\ u_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1},$$

$$d)\ u_n = \frac{n+\sqrt{3}}{n^2+4},\ e)\ u_n = n\sin(\frac{1}{n^2}),\ f)\ u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

(Pour le e), on pourra utiliser l'inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et le théorème des gendarmes. Pour le f), on pensera à l'identité (que l'on justifiera) $\sqrt{a}-\sqrt{b} = (a-b)/(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ pour $a, b > 0$.)

2) Rappeler la définition d'une suite croissante/décroissante et le théorème des suites adjacentes.

3) Répondre par vrai ou faux, donner un contre-exemple dans le second cas.
a) Une suite bornée est convergente.
b) Une suite convergente est bornée.
c) Une suite décroissante est convergente.
d) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont telles que $u_n \leq v_n \, \forall n \in \mathbb{N}$ et si (v_n) converge, alors (u_n) converge.
e) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 7 (Approche des séries)

Calcul de $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. Pour quelles valeurs de q, la suite (s_n) a-t'elle une limite finie ?