Licence MI 2ème année, Analyse, Semestre 1,
Feuille 3 (Séries), Année 2004-2005.

Exercice 1 (Définition et calcul de sommes)

1) En utilisant une décomposition en éléments simples, calculer les sommes partielles, puis en déduire la nature et la somme éventuelle des séries de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \qquad v_n = (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}, \qquad (n \geq 1).$$

2) Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^2}\, dx \geq \frac{1}{n^2}.$$

En montrant que les sommes partielles de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ sont majorées, établir la convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$. En déduire celle de $\sum \frac{1}{n!}$.

3) En admettant que la somme de cette dernière série vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$, étudier la nature puis calculer la somme des séries de terme général $(n \geq 1)$:

$$w_n = \frac{n+1}{n!}, \qquad x_n = \frac{n^2}{n!}.$$

Exercice 2 (Nature de séries)

Etudier la nature des séries suivantes de terme général u_n.

$$a)\ u_n = \frac{n^3+2}{2n^3+1},\ b)\ u_n = \mathrm{Arcsin}\frac{n^2}{n^2+2},\ c)\ u_n = e^{-\sqrt{n}},\ d)\ u_n = \frac{1}{\ln n},$$

$$e)\ u_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n^3-4},\ f)\ u_n = \sin^3(\frac{1}{n}),\ g)\ u_n = \frac{1}{n^{1+1/n}},\ h)\ u_n = \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}},\ i)\ u_n = \frac{n^3}{n!},$$

$$j)\ u_n = \frac{(n+1)(n+2)...(2n)}{(2n)^n},\ k)\ u_n = \frac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n},\ l)\ u_n = \frac{1}{n!},\ m)\ u_n = \frac{n!}{n^n},$$

$$n)\ u_n = \frac{1}{n^3} + \frac{2i}{n},\ o)\ u_n = \frac{e^n n!}{n^n},\ p)\ u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},\ q)\ u_n = \left(\frac{3+i}{5}\right)^n.$$

(Pour le p), on calculera u_{n+1}/u_n et on se rappellera que $x \geq \ln(1+x)$.)

Exercice 3 (Equivalents, signe constant et développements limités)

1) Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}$. Montrer que u_n et v_n sont équivalentes en $+\infty$, puis étudier la nature des séries de terme général u_n et v_n.

2) Etude de la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, (on mettra $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ en facteur, puis on fera un développement limité). Comparer u_n avec $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

3) Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3}.$$

Exercice 4 (Comparaison série-intégrale)

1) Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que pour $n \geq 2$,

$$\int_{n}^{n+1} f(t)\, dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt.$$

2) Utiliser la question 1) pour donner un équivalent simple de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ lorsque $n \to +\infty$.

3) Retrouver le résultat précédant en utilisant la suite $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

4) Par une technique analogue au 1)-2), trouver un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de $A_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n}$.

Exercice 5 (Une différence entre séries et intégrales)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue. Quels liens existent entre $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$?

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. Quels liens existent entre la convergence de la suite (a_n) et la convergence de la série de terme général a_n. En particulier, quels sont les liens entre $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge et $a_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$?

Donner des contre-exemples aux propriétés fausses.

Exercice 6 (Termes suivants du développement)

1) Montrer que $H_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ est équivalent à $\ln n$ quand $n \to +\infty$.

2) On pose $U_n = H_n - \ln n$. En trouvant un équivalent de $U_{n+1} - U_n$, montrer que la série de terme général $U_{n+1} - U_n$ est convergente. En déduire que la suite de terme général U_n est convergente, on note γ sa limite.

3) On pose $V_n = H_n - \ln n - \gamma$. Montrer que la série de terme général $V_{n+1} - V_n$ est convergente en donnant un équivalent de $V_{n+1} - V_n$.

4) Lorsque $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, sous quelles hypothèses vues en cours peut-on comparer $\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $\sum_{k=1}^{n} b_k$. Même question pour $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ et $\sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

5) En utilisant les deux questions précédantes, montrer que V_n est équivalent à $\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

6) Conclure que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{2n}\right)$.

Exercice 7 (Equivalent d'une suite à l'aide d'une série)

On considère la suite définie par $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour $n \geq 1$ et $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

1) Montrer que $u_n \to 0$.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que $(\sin(u_n))^\alpha = u_n^\alpha - \frac{\alpha}{6} u_n^{\alpha+2} + \underset{n\to\infty}{o}(u_n^{\alpha+2})$.

3) Donner un choix de α simple au vu de la formule précédante pour lequel la série de terme général $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ est divergente.

4) En déduire, en utilisant le résultat du cours sur les équivalents de séries divergentes, un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Annales (Septembre 2004)

On pose $u_n = \frac{\sin n}{\cos n + \sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1) a) Donner le développement limité à l'ordre 2 au point 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

b) En déduire que $u_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{\sin(2n)}{n} + v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, où $v_n = \frac{\sin(n)\cos^2(n)}{n^{3/2}}$.

2) Etudier la nature de la série $\sum v_n$.

3) a) Rappeler la valeur de la somme des $N + 1$ premiers termes d'une suite géométrique : si $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\sum_{n=0}^{N} q^n = ...$

b) En prenant $q = e^i$ et la partie imaginaire de la formule du a), en déduire que $\left|\sum_{n=1}^{N} \sin(n)\right| \leq M$, où M est une constante (à préciser) indépendante de N.

c) Que faut-il prendre comme valeur de q pour montrer de même que $\sum_{n=1}^{N} \sin(2n)$ est bornée par rapport à N ?

d) Etudier la nature des séries $\sum \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{\sin(2n)}{n}$.

4) Déduire du 1)-2)-3) la nature de la série $\sum u_n$.