Licence MI 2ème année, Analyse, Semestre 1,
Feuille 6 (Séries entières), Année 2004-2005.

Exercice 1 (Rayons de convergence)

Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} x^n,\ g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n x^n (\text{où } a,b>0),$$

$$h(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{n!}x^n,\ i(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}}x^n,\ j(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^2+4n-1}{n+4}.\frac{1}{n!}x^n.$$

Exercice 2 (Somme de séries entières)

Déterminer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-x)^n,\ g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^n x^n,\ h(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\,x^{n-1},\ i(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\,x^n,\ j(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\,x^n.$$

Exercice 3 (Ensemble de définition et continuité)

Donner l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les fonctions suivantes sont bien définies

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2},\ g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}(-1)^{n+1}.$$

Sont-elles continues sur leur ensemble de définition ?

Exercice 4 (Développements en série entière)

1) Rappeler le développement en série entière au voisinage de $x=0$ des fonctions suivantes :

$$x\mapsto 1/(1+x),\ x\mapsto \cos x,\ x\mapsto e^x,\ x\mapsto (1+x)^\alpha.$$

2) En déduire les développements en série entière au voisinage de $x=0$ de :

$$x\mapsto 1/(1+x^2),\ x\mapsto \ \mathrm{Arctan} x.$$

3) Développer en série entière au voisinage de $x=0$ les fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{1}{2+x},\ g(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Exercice 5 (Séries entières et équation différentielle)

On se donne l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $]\,0,+\infty[$,

$$(\mathcal{E}) \qquad (x^2+x)\,y''+(3\,x+1)\,y'+y=0\ .$$

On cherche une solution de cette équation qui soit développable en série entière. On suppose que cette solution est de la forme :

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n \qquad \text{sur l'intervalle de convergence }]-R,R\,[\ .$$

a) Trouver une relation simple entre a_n et a_{n+1} pour tout $n\in\mathbb{N}$.
b) En déduire que $a_n=(-1)^n a_o$ et une expression simple de y (c'est-à-dire que l'on donnera la valeur de la somme de la série entière obtenue).

Exercice 6 (Séries entières et équation différentielle, 2)

On considère l'équation différentielle (E) suivante

$$x(x^2+1)y''+(x^2-1)y'=1.$$

1) On suppose qu'il existe une solution f de (E) développable en série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Calculer a_1 et montrer que

$$(n+1)a_{n+1}+(n-1)a_{n-1}=0, \qquad n\geq 2.$$

Déterminer les coefficients a_n de cette série entière. Quel est son rayon de convergence ?

2) En déduire que l'expression des solutions de (E) développables en série entière est

$$x\mapsto -\text{Arctan}\, x+a\ln(1+x^2)+b, \qquad a,b\in\mathbb{R}.$$

Contrôle continue, semaine 11

Questions et exercices de cours :

- Définition de la convergence simple d'une suite de fonctions.
- Définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions.
- Théorème de continuité des suites de fonctions.
- Théorème d'intégration des suites de fonctions.
- Théorème de dérivation des suites de fonctions.
- Etude de la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$) de la suite de fonctions définie par $f_n(x)=\dfrac{n^2}{1+n^2\,x^2}$.
- Etude de la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la suite de fonctions définie par $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2\,x^2}$.
- Définition de la convergence simple d'une série de fonctions.
- Définition de la convergence normale d'une série de fonctions.
- Théorème de continuité des séries de fonctions.
- Théorème d'intégration des séries de fonctions.
- Théorème de dérivation des séries de fonctions.
- Montrer que $F(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que $F(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n^3}$ est dérivable sur $[0,+\infty[$.

Remarque : il faut toujours préciser les objets que l'on utilise. Par exemple, il faut dire : "Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$,..."