Licence MI 2ème année, Analyse, Semestre 1,
Feuille 7 (Séries de Fourier), Année 2004-2005.

Exercice 1

Calculer les séries de Fourier associées aux fonctions 2π périodiques suivantes :
1) $f(x) = \pi - x$ pour $0 < x \leq \pi$ et f impaire.
2) $g(x) = \pi - x$ pour $0 \leq x \leq \pi$ et g paire.

Exercice 2

Soit f la fonction de période 2π, égale à $\frac{\pi-x}{2}$ sur $]0, 2\pi]$.
1) Calculer la série de Fourier de f.
2) Montrer l'égalité suivante :

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n},$$

en précisant pour quelle valeur de x cette égalité est vraie.

Exercice 3

Soit f la fonction paire, de période 2π, égale à $(\pi - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \pi$.
1) Calculer les coefficients de Fourier de f.
2) Montrer que la série de Fourier de f est convergente en x de somme $f(x)$.
3) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Licence MI 2ème année, Analyse, Semestre 1,
Feuille 7 (Séries de Fourier), Année 2004-2005.

Exercice 1

Calculer les séries de Fourier associées aux fonctions 2π périodiques suivantes :
1) $f(x) = \pi - x$ pour $0 < x \leq \pi$ et f impaire.
2) $g(x) = \pi - x$ pour $0 \leq x \leq \pi$ et g paire.

Exercice 2

Soit f la fonction de période 2π, égale à $\frac{\pi-x}{2}$ sur $]0, 2\pi]$.
1) Calculer la série de Fourier de f.
2) Montrer l'égalité suivante :

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n},$$

en précisant pour quelle valeur de x cette égalité est vraie.

Exercice 3

Soit f la fonction paire, de période 2π, égale à $(\pi - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \pi$.
1) Calculer les coefficients de Fourier de f.
2) Montrer que la série de Fourier de f est convergente en x de somme $f(x)$.
3) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$