Licence MI 2ème année, Analyse, Semestre 1,
Feuille 4 (Suites de fonctions), Année 2004-2005.

Exercice 1 (Convergence simple)

Etudier la convergence simple des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ suivantes :

$$a) f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2+1},\ b)\ f_n(x) = \frac{x}{n},\ c)\ f_n(x) = \frac{nx}{x^2+1},\ d)\ f_n(x) = x^n,$$

$$e)\ f_n(x) = \frac{n}{1+nx},\ f)\ f_n(x) = \frac{x}{n+|x|},\ g)\ g_n(x) = nx^2e^{-nx},$$

$$h)\ f_n(x) = nxe^{-nx}\sin x,\ i)\ f_n(x) = \sqrt{x^2+1/n^2}.$$

Exercice 2 (Convergence uniforme)

On s'intéresse maintenant à la convergence uniforme des exemples de l'exercice 1.

1) Etudier les cas a), b) et c), c'est-à-dire s'intéresser (si cela a un sens) à la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, ou à défaut sur $[-R, R]$ avec $R > 0$, ou à défaut sur $[0, R]$ avec $R > 0$,...

2) Etudier la CVU de l'exemple d) sur $[0, 1]$ puis sur $[0, a]$ avec $0 < a < 1$. Que peut-on dire de la continuité de chaque f_n et de la limite simple f sur $[0, 1]$?

3) Etudier la CVU de l'exemple e) sur $\mathbb{R}$ et sur $]0, +\infty[$. Pour le second cas, on posera $r_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$ pour $x \in]0, +\infty[$, où f désigne la limite simple de $(f_n)_{n\geq 1}$, puis on déterminera les variations de r_n afin d'obtenir $\sup\limits_{x\in]0,+\infty[} r_n(x)$.

Que peut-on dire du caractère borné de chaque fonction f_n et de la limite simple f sur $]0, +\infty[$?

4) Etudier la CVU de l'exemple f) sur $[-R, R]$ avec $R > 0$ puis sur $\mathbb{R}$ en déterminant la quantité $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$ à l'aide d'une étude des variations de la fonction $x \mapsto f_n(x)$.

5) Etudier la CVU de l'exemple i) sur $\mathbb{R}$ ł'aide de l'identité $\sqrt{a} - \sqrt{b} = (a - b)/(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ pour $a, b > 0$. Que peut-on dire de la dérivabilité de chaque fonction f_n et de la limite simple f sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 (Variations de fonctions)

1) On s'intéresse au g) de l'exercice 1.

a) Etudier les variations de g_n sur $[0, +\infty[$, en déduire le maximum de la fonction $x \mapsto g_n(x)$ sur $[0, +\infty[$ et $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |g_n(x) - g(x)|$ où g est la limite simple de la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$.

b) En déduire l'étude de la CVU de la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$.

2) Etudier la CVU sur $[0, +\infty[$ de l'exemple h) de l'exercice 1. (On utilisera la question précédante).

Exercice 4 (Un exercice classique)

Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^\alpha xe^{-nx}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.

2) En s'inspirant de la technique de l'exercice 3, question 1)a), étudier la convergence uniforme de cette suite de fonctions sur $\mathbb{R}^+$, sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$.

Exercice 5 (Convergence uniforme et intégration)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}.$$

1) Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2) Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)\, dt$ et la limite de I_n lorsque $n \to +\infty$.
3) La convergence est-elle uniforme ? On rappellera l'énoncé du résultat utilisé.

Annales (Septembre 2003)

1) Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n : x \mapsto \frac{n^2x^2}{1 + n^2x^2}.$$

On note f la limite obtenue et D l'ensemble (que l'on précisera) sur lequel la convergence simple de $(f_n)_{n\geq 0}$ vers f a lieu.

2) Etudier la continuité de f_n et de f ?

3) Que peut-on en déduire sur la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq 0}$ sur D ? On rappellera l'énoncé du résultat utilisé.