Maîtrise de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Analyse Approfondie, Feuille 8, Année 2004-2005.

Exercice 1 (Solution élémentaire de l'équation de la chaleur)

1. Montrer que pour tout N,
$$I_N = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi|x|^2}\, dx = 1,$$
où $|.|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$. (On commencera par le cas $N = 1$ en calculant I_2 en coordonnées polaires.)

2. Soit $\varphi : [0, +\infty[_t \times \mathbb{R}^N_x \to \mathbb{R}$ et
$$\mathcal{F}(\varphi)(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2i\pi x\cdot\xi}\varphi(t, x)\, dx$$
sa transformée de Fourier en x. Donner (sans justification) les expressions de $\mathcal{F}(\partial_{x_j}\varphi)$, $\mathcal{F}(-2i\pi x_j\varphi)$ et $\mathcal{F}(\partial_t\varphi)$ en fonction de $\mathcal{F}(\varphi)$.

3. En déduire que si $\varphi(t, x) = \phi(x) = e^{-\pi|x|^2}$, alors $\mathcal{F}(\phi)(t, \xi) = \mathcal{F}(\phi)(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$.

4. En déduire par changement de variable l'expression de $\mathcal{F}(\varphi_a)(\xi)$ pour $\varphi_a(x) = e^{-\pi a^2|x|^2}$ où $a \in \mathbb{R}^*$.

5. On cherche à résoudre
$$\partial_t E - \Delta_x E = 0, \qquad \text{dans }]0, +\infty[_t \times \mathbb{R}^N_x, \tag{1}$$
avec la condition initiale
$$E(0, x) = \delta(x).$$
Ecrire l'équation différentielle ordinaire en t et la condition initiale en $t = 0$ vérifiée par la fonction $t \mapsto \mathcal{F}(E)(t, \xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$. En déduire $\mathcal{F}(E)(t, \xi)$ puis $E(t, x)$ solution de (1).

Exercice 2 (Régularisation)

Soit $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support dans la boule unité fermée, positive et d'intégrale 1. On pose $\theta_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^N}\theta\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ pour $\alpha > 0$.

1. Si f est continue et à support compact dans K, montrer que $f * \theta_\alpha$ est à support compact dans $K_\alpha = \{x\,;\, \text{dist}\,(x, K) \le \alpha\}$.

2. Soit $p \in [0, +\infty[$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \theta_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et
$$\|f * \theta_\alpha\|_p \le \|f\|_p.$$
(On pourra écrire $f(x-\alpha z)\,\theta(z) = (f(x-\alpha z)\,\theta(z)^{1/p})\,(\theta(z)^{1/p'})$ où p' est l'exposant conjugué de p.)

3. Si $f \in C^0_c(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \theta_\alpha \underset{\alpha\to 0}{\to} f$ uniformément et dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

4. Soit $p \in [0, +\infty[$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \theta_\alpha \underset{\alpha\to 0}{\to} f$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$.
(On supposera connu que C^0_c est dense dans L^p).

5. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \theta_\alpha \underset{\alpha\to 0}{\to} f$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 3 (Exemple de problème aux limites)

On cherche à résoudre
$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur } I =]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$
avec $f \in L^2(I)$.
Une solution classique (ou forte) est une fonction $u \in C^2(\overline{I})$ vérifiant (2) au sens usuel.
Une solution faible est une fonction $u \in H_0^1(I)$ telle que
$$\int_I u'\varphi' + \int_I u\varphi = \int_I f\varphi, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(I). \tag{3}$$

1. Montrer que toute solution classique est une solution faible.
2. En utilisant le théorème de Lax-Milgram ou celui de Riesz-Fréchet, montrer que pour toute $f \in L^2(I)$, il existe une unique solution faible $u_* \in H_0^1(I)$ (c'est-à-dire telle que (3)).
3. Montrer que $u_* \in H^2(I)$.
4. Si on suppose de plus que $f \in C(\overline{I})$, en déduire que $u_* \in C^2(\overline{I})$. Conclure alors que u_* est une solution classique de (2).

Exercice 4 (Inégalité de Poincaré)

Soit I borné dans $\mathbb{R}$. Alors il esiste $C > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(I)$,
$$\|u\|_{H^1} \leq C\|u'\|_{L^2}.$$

Exercice 5 (Convergence faible)

On rappelle que pour une suite (f_n) de $L^2(\Omega)$, on dit que $f_n \rightharpoonup f$ converge faiblement dans $L^2_w(\Omega)$ si
$$\forall \varphi \in L^2(\Omega), \qquad \int_\Omega f_n\varphi \to \int_\Omega f\varphi.$$

1. Montrer que si $f_n \to f$ dans L^2 (fort) alors $f_n \rightharpoonup f$ dans L^2_w (faible).
2. Montrer que $f_n(x) = \sin(nx) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(]0,1[)$ et que $f_n^2 \rightharpoonup 1/2$ dans $L^2(]0,1[)$.
3. Montrer que si $f_n \rightharpoonup f$ dans L^2_w alors (f_n) est bornée dans L^2. (On pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus.)
   On rappelle que si (f_n) est bornée dans L^2 alors il existe une sous-suite de (f_n) qui converge faiblement dans L^2 vers un élément de L^2.
   On définit maintenant la convergence faible dans H^1 par
   $$f_n \rightharpoonup f \text{ dans } H^1_w \text{ si } f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^2_w \text{ et } f_n' \rightharpoonup f' \text{ dans } L^2_w.$$
4. Montrer que si $f_n \to f$ dans H^1 (fort) alors $f_n \rightharpoonup f$ dans H^1_w (faible).
5. Montrer que si $f_n \rightharpoonup f$ dans H^1_w alors (f_n) est bornée dans H^1.
6. Montrer que si (f_n) est bornée dans H^1 alors il existe une sous-suite de (f_n) qui converge faiblement dans H^1 vers un élément de H^1.

Exercice 6 (Théorème de Rellich)

1. Montrer que
   $$\|f\|^2_{*s} = \int_{\mathbb{R}} (1 + |y|^2)^s |\hat{f}(y)|^2 \, dy$$
   est une norme équivalente sur $H^s(\mathbb{R})$ à la norme classique pour $s = 0, 1$ ($\hat{f}$ désignant la transformée de Fourier).

2. On suppose que $f_n \rightharpoonup 0$ dans $H^1_w(\Omega)$ avec Ω ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie et on note $c = \sup_{\mathbb{N}} \|f_n\|_{*1}$.

   (a) Pourquoi $c < +\infty$?

   (b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que

   $$\|f_n\|^2_{*0} \leq \varepsilon c + E_n, \qquad E_n = \int_{|y|\leq R} |\hat{f}_n(y)|^2\, dy.$$

   (c) En utilisant la fonction $g_y(x) = e^{2i\pi xy}$, montrer que $E_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

   (d) Conclure que $f_n \to 0$ dans L^2.

3. En conclure, pour Ω ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie, que si $f_n \rightharpoonup f$ dans $H^1_w(\Omega)$, alors $f_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$. (Théorème de Rellich).

4. Montrer qu'une suite bornée dans $H^1(\Omega)$, avec Ω ouvert de mesure finie, a une sous-suite qui converge fortement dans L^2.

Exercice 7 (Application à une équation différentielle)

Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné. Soient $u_n \in H^1_0(I)$ et $g_n \in L^2(I)$ telles que

$$u_n' + u_n^2 = g_n, \text{ p.p. dans } I.$$

On suppose que (g_n) est bornée dans $L^2(I)$. Montrer qu'il existe des sous-suites $(u_{\sigma(n)})$ et $(g_{\sigma(n)})$ qui convergent faiblement vers u et g dans $L^2(I)$ et tel que les limites vérifient

$$u' + u^2 = g, \text{ p.p. dans } I.$$