Maîtrise de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Analyse Approfondie, Feuille 6, Année 2004-2005.

Exercice 1

Résoudre $Y' = AY$ dans les deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

avec $\lambda > 0$, $a < 0$, $b > 0$.

Exercice 2 (Système proie-prédateur)

Cet exercice a pour objet l'étude d'un modèle de dynamique des populations de proies et de prédateurs.

Soient $x(t)$ le nombre de proies (sardines ?) et $y(t)$ le nombre de prédateurs (requins...) à la date t. Le modèle d'évolution de ces populations proposé par Volterra est le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x(1-y), \\ y' = y(x-1). \end{cases} \tag{1}$$

1) Interprétez ce système différentiel.
2) Que peut-on dire concernant un problème de Cauchy associé à (1) ?
3) Résolvez les problèmes de Cauchy constitués de (1) et de $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = y_0 \geq 0 \end{cases}$, puis $\begin{cases} x(0) = x_0 \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.
4) Soient $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.
a) Montrez que la solution maximale de (1) partant de (x_0, y_0) à $t = 0$ vérifie, pour tout t de son intervalle maximal, $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$.
b) Montrez qu'il existe une fonction F définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ telle que la solution maximale de (1) partant de (x_0, y_0) à $t = 0$ vérifie $F(x(t), y(t)) = C$ où C est une constante.
5) On divise $(\mathbb{R}^{+*})^2$ en les quatre ouverts A, B, C, D :

$$\begin{cases} A = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \quad t.q. \quad x > 1, y > 1\}, & B = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \quad t.q. \quad x < 1, y > 1\}, \\ C = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \quad t.q. \quad x < 1, y < 1\}, & D = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \quad t.q. \quad x > 1, y < 1\}. \end{cases}$$

a) Montrez que la solution maximale de (1) partant de (x_0, y_0) à $t = 0$ sort de A en temps fini.
b) Quel est le comportement ultérieur de cette solution maximale ?
6) Soient $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Montrez que la solution maximale de (1) partant de (x_0, y_0) à $t = 0$ est périodique.
7) Tracez les trajectoires décrites par les solutions maximales de (1).

Exercice 3 (Equation du télégraphiste)

Résoudre

$$\partial^2_{tt} u + \alpha \partial_t u - \partial^2_{xx} u = 0,$$

avec $\alpha > 0$ en utilisant la séparation des variables.

Exercice 4 (Condition aux limites)

Soit $\alpha, \varepsilon > 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y' + \alpha y = \varepsilon y'', \qquad \forall x \in [0,1],$$

avec les conditions de bord

$$y(0) = a, \qquad y(1) = b.$$

2. Que se passe-t'il pour ces solutions lorsque $\varepsilon \to 0$? Retrouve-t'on les solutions du problème avec $\varepsilon = 0$?