Maîtrise de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Analyse Approfondie, Feuille 5, Année 2004-2005.

Exercice 1 (Inclusion sur un borné)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Montrer que pour $1 \le p \le q \le +\infty$, on a $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

Exercice 2 (Espace de Banach)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Montrer que $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour $p \in [1, +\infty]$.

Exercice 3 (Convolution)

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $p \in [1, +\infty]$. On définit la convolution selon

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy.$$

On veut montrer que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et que

$$\|f * g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}. \tag{1}$$

1) Pour $p = 1$, montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$. Ceci permet de dire que $f * g$ est bien définie. Montrer (1) dans ce cas.

2) Montrer (1) pour tout $p \in]1, +\infty[$ en utilisant le cas $p = 1$.

3) Soit $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ où $1/p + 1/p' = 1$. On pose $\tilde{f}(x) = f(-x)$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f * g)\, h = \int_{\mathbb{R}^N} g\, (\tilde{f} * h).$$

Exercice 4 (Densité)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On suppose que l'on a montré que $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \le p < \infty$.

Soit ρ_n une suite régularisante, c'est-à-dire une suite de fonctions telles que

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ \ \mathrm{Supp}\rho_n \in B(0, \frac{1}{n}),\ \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n = 1,\ \rho_n \ge 0.$$

1) Soit $f \in C(\mathbb{R}^N)$. Montrer que

$$\rho_n * f \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f \ \text{ uniformément sur tout compact de } \mathbb{R}^N.$$

2) Soit $f \in L^P(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \le p < \infty$. Montrer que

$$\rho_n * f \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f \ \text{ in } L^p(\mathbb{R}^N).$$