Maîtrise de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Analyse Approfondie, Feuille 3, Année 2004-2005.

Exercice 1 (Projection sur un convexe)

Soit H un hilbert réel de produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ et K un convexe, fermé, non vide de H. On rappelle que pour tout $f \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$\|f-u\| =_{v\in K} \|f-v\|.$$

De plus, u est caractérisé par

$$u \in K, \qquad (f-u \mid v-u) \leq 0, \forall v \in K.$$

On pose $u = P_K f$. Montrer que P_K est lipschitzienne de constante 1.

Exercice 2 (Convergence faible)

Soit H un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H converge faiblement vers un élément x de H si, pour tout $y \in H$,

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n \mid y) = (x \mid y).$$

On note $x_n \rightharpoonup x$.

(1) Montrer que $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$.
(2) Montrer que $(x_n \rightharpoonup x \text{ et } \|x_n\| \to \|x\|) \Rightarrow x_n \to x$.
(3) Montrer qu'une suite faiblement convergente est bornée.

Exercice 3 (Théorème ergodique de von Neumann)

Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T\| \leq 1$.

(1) Démontrer que si $x \in H$, alors $Tx = x$ si et seulement si $(Tx \mid x) = \|x\|^2$.
(2) En déduire que $\mathrm{Ker}\,(Id - T) = \mathrm{Ker}\,(Id - T^*)$.
(3) Démontrer que $\big(\mathrm{Im}\,(Id-T)\big)^\perp = \mathrm{Ker}\,(Id-T)$ et en déduire

$$H = \mathrm{Ker}\,(Id-T) \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(Id-T)}.$$

(4) Démontrer le résultat suivant : *Soit H un espace de Hilbert et $J \subset H$. Soit (Φ_n) une suite bornée de $\mathcal{L}(H)$ et $\Phi \in \mathcal{L}(H)$. Si la suite $\big(\Phi_n(x)\big)$ converge vers $\Phi(x)$ pour tout $x \in J$, alors $\big(\Phi_n(x)\big)$ converge encore vers $\Phi(x)$ pour tout $x \in \overline{J}$.*
(5) On pose, pour $n \geq 1$,

$$T_n = \frac{1}{n+1}[Id + T + \ldots + T^n].$$

Montrer que pour tout $x \in H$, $\lim_{n\to+\infty} T_n x = Px$ où P est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}\,(Id-T)$. (*Indication :* On considèrera successivement le cas $x \in \mathrm{Ker}\,(Id-T)$, $x \in \mathrm{Im}\,(Id-T)$ et $x \in \overline{\mathrm{Im}\,(Id-T)}$.)

Exercice 4 (Isométrie)

Soit T une application linéaire continue d'un espace de Hilbert H dans lui-même.

(1) Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
 (a) $T^*T = I$,
 (b) pour tous $x, y \in H$, $(Tx, Ty) = (x, y)$,
 (c) pour tout $x \in H$, $\|Tx\| = \|x\|$.
 Si T possède ces propriétés, on dit qu'elle est une *isométrie.*
(2) Montrer que l'image d'une isométrie est fermée.
(3) Montrer que le shift unilatéral, $S : (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \mapsto (0, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, \ldots)$ est une isométrie non surjective de ℓ^2 dans lui-même. Calculer son adjoint.