Maîtrise de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Analyse Approfondie, Feuille 1, Année 2004-2005.

Exercice 1 (Calcul de normes)

(1) On considère $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ normés par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $S : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ défini par
$$S(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \quad \text{pour } f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}).$$
Montrer que S est continue et calculer sa norme.

(2) Soit maintenant $T : \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ défini par
$$T(f) = f'$$
Est-ce que T est continue ?

Exercice 2 (Espaces l^p)

On note pour $p \geq 1$,
$$l^p(\mathbb{N}) = \{u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ réelle } ; \sum_{k\geq 0} |u_k|^p < +\infty\},$$
muni de la norme
$$\|u\|_p = \left(\sum_{k\geq 0} |u_k|^p\right)^{1/p},$$
et $l^\infty(\mathbb{N})$ l'espace des suites réelles bornées muni de $\|(u_k)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k|$.

(1) Montrer que l^1 est un espace de Banach.

(2) Montrer que l^∞ est isométrique à $(l^1)'$ et que pour $p > 1$, $(l^q)'$ est isométrique à l^p où $1/p + 1/q = 1$.

Exercice 3 (Hyperplans)

Dans un espace vectoriel réel E, on appelle hyperplan (affine) l'ensemble
$$H = \{x \in E\,;\; f(x) = \alpha\}$$
où f est une forme linéaire non nulle sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrer que si E est un e.v.n., l'hyperplan H est fermé si et seulement si f est continue.

Exercice 4 (Distance à un hyperplan)

Soit E un e.v.n. sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in E$ et $A \subset E$, on pose
$$d(x,A) = \inf\{\|x-y\|\,;\; y \in A\}.$$
Soit f une forme linéaire continue sur E et $H = f^{-1}(0)$. Montrer que $d(x,H) = \dfrac{|f(x)|}{\|f\|}$.