



TRANSPORT OPTIMAL ET EDP GEOMETRIQUES

YANN BRENIER

CNRS, FR 2800 et LJAD, Université de
Nice-Sophia-Antipolis,

Adresse et lien électroniques:

`brenier@math.unice.fr`,

`http://www-math.unice.fr/~brenier/`

Théorie du transport optimal

et équations aux dérivées partielles géométriques/ Sommaire :

1. Transport optimal statique —————> **MONGE-AMPERE**
(courbure gaussienne prescrite)
2. Transport optimal quasi-statique —-> **EULER**
(fluides et plasmas vus comme géodésiques -exactes ou approchées- sur des groupes de transformation conservant le volume)
3. Transport optimal dynamique —————> **BORN-INFELD**
(surfaces extrémales dans l'espace de Minkowski, cordes et MHD sans pression)

I: QU'EST-CE QUE LE TRANSPORT OPTIMAL?

Au départ, il s'agit d'un simple problème d'OPTIMISATION COMBINATOIRE:

1. On doit déplacer N personnes dans l'espace euclidien \mathbf{R}^d ;
2. DEPUIS leurs positions initiales données : X_1, \dots, X_N
3. VERS leurs destinations finales données globalement mais pas individuellement : Y_1, \dots, Y_N ;
4. Le COUT de transport pour aller de x à y est donné par $c(x, y)$;
5. Une affectation est définie comme une bijection :
 $\sigma : (1, \dots, N) \rightarrow (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$, i.e. une PERMUTATION des N premiers entiers.

UNE AFFECTATION σ EST OPTIMALE SI ET SEULEMENT SI ELLE MINIMISE LE COUT TOTAL:

$$\sum_{i=1}^N c(X_i, Y_{\sigma_i})$$

Un exemple important (le seul qui nous intéressera dans cet exposé) est celui du “coût quadratique”

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2,$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne sur \mathbf{R}^d .

Algorithmes et complexité?

1. Pour des matrices de coût arbitraires, le coût de calcul pour trouver l'affectation optimale est au pire de $O(N^3)$ cf. Balinski, Math. Programming 34 (1986),
2. Conjecture : dans le cas du coût quadratique, on devrait descendre à $O(N \log N)$ (vrai si $d = 1$). Une telle percée aurait de nombreuses retombées!

Dans le cas du coût quadratique, une affectation σ est optimale SI ET SEULEMENT SI le vecteur $Z = (Y_{\sigma_i})_{i=1,N}$ des destinations optimales vérifie, avec le vecteur $X = (X_i)_{i=1,N}$ des positions initiales, la propriété de **MONOTONIE CYCLIQUE**:

Pour tout cycle de longueur $L \leq N$

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_L \rightarrow i_1$$

dans $\{1, \dots, N\}$, on a:

$$Z_{i_1} \cdot (X_{i_1} - X_{i_2}) + \dots + Z_{i_k} \cdot (X_{i_k} - X_{i_{k+1}}) + \dots + Z_{i_L} \cdot (X_{i_L} - X_{i_1}) \geq 0$$

(où \cdot désigne le produit scalaire dans \mathbf{R}^d)

En particulier (cas des 2-cycles):

$$(Z_k - Z_j) \cdot (X_k - X_j) \geq 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

Un théorème de Rockaffellar nous apprend:

Une suite de points $(X_1, Z_1), \dots, (X_N, Z_N)$ dans $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ est **CYCLIQUEMENT MONOTONE** si et seulement s'il existe une fonction **CONVEXE** Lipschitzienne Φ , définie sur l'espace Euclidien, telle que, pour tout $i = 1, \dots, N$,

$$\mathbf{Z}_i \in \partial\Phi(\mathbf{X}_i)$$

ce qui signifie

$$\Phi(\mathbf{x}) \geq \Phi(\mathbf{X}_i) + \mathbf{Z}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{X}_i), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d.$$

Notons que Φ est explicitement donnée par:

$$\Phi(x) = \sup \left\{ Z_{i_L} \cdot (x - X_{i_L}) + \sum_{k=1}^{L-1} Z_{i_k} \cdot (X_{i_{k+1}} - X_{i_k}) \right\}$$

où le sup est pris sur toutes les suites d'entiers

$$1 \leq i_1, \dots, i_L \leq N.$$

(Hélas cette formule semble inutile pour le calcul numérique.)

Ainsi, on associe un objet de nature **CONTINUE**, à savoir une fonction **CONVEXE** Φ , à un problème de nature **DISCRETE**, à savoir le problème d'affectation optimale avec coût quadratique, dont la solution est une permutation.

Cette observation conduit à considérer la version **CONTINUE** du problème en laissant tendre N vers ∞ .

En fait, il se trouve que le premier problème de transport optimal, traité par **MONGE** en 1781 dans le "MEMOIRE SUR LA THEORIE DES DEBLAIS ET DES REMBLAIS", était posé dans un cadre continu.

Le problème de Monge a été reformulé et généralisé par **KANTOROVICH** dans les années 1940 comme un programme linéaire et résolu par dualité au moins dans le cas discret.

Référence : Rachev, Rüschendorf, Mass transportation problems, Springer-Verlag, 1998.

VERS LE CONTINU

On considère les mesures de probabilité

$$\mu_N = \frac{1}{N}(\delta_{X_1} + \dots + \delta_{X_N}), \quad \nu_N = \frac{1}{N}(\delta_{Y_1} + \dots + \delta_{Y_N}),$$

et on suppose que, lorsque N tend vers l' ∞ , elles convergent respectivement vers deux mesures de probabilité de densités respectives $\alpha(x)dx$ et $\beta(y)dy$.

Considérons la **MESURE D'AFFECTION OPTIMALE**
définie sur $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ par :

$$\gamma_N = \frac{1}{N} (\delta_{(X_1, Y_{\sigma_1})} + \dots + \delta_{(X_N, Y_{\sigma_N})}),$$

qui donne la probabilité de partir du point x pour arriver à la destination y (i.e. $1/N$ si $x = X_i$ et $y = Y_{\sigma_i}$ pour un $i = 1, \dots, N$).

Alors, quand $N \rightarrow \infty$, on a

$$\gamma_N = \frac{1}{N} (\delta_{(X_1, Y_{\sigma_1})} + \dots + \delta_{(X_N, Y_{\sigma_N})}) \rightarrow \delta(y - D\Phi(x)) \alpha(x) dx$$

où Φ est une fonction CONVEXE.

THEOREME :

TRANSPORT OPTIMAL ET MONGE-AMPERE

YB, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 305 (1987) and Comm. Pure Appl. Math. 44 (1991), Smith and Knott, J. Optim. Theory Appl. 52 (1987), Caffarelli, J. Amer. Math. Soc. 5 (1992) and Ann. of Math. (2) 144 (1996)

Etant donnés deux ouverts bornés réguliers U et V dans \mathbb{R}^d , avec V uniformément strictement convexe, deux densités régulières $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, définies respectivement sur \bar{U} et \bar{V} , d'intégrale un, alors il existe une unique application régulière $D\Phi : \bar{U} \rightarrow \bar{V}$, dérivant d'un potentiel convexe Φ , telle que:

$$\beta(\mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}))\det(\mathbf{D}^2\Phi(\mathbf{x})) = \alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in U.$$

$\mathbf{D}\Phi$ est appelée application de transport optimal de (U, α) vers (V, β) .

Commentaire sur l'équation de Monge-Ampère :

$$\beta(\mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}))\det(\mathbf{D}^2\Phi(\mathbf{x})) = \alpha(\mathbf{x})$$

Cette équation elliptique “complètement non-linéaire” est classiquement liée au problème de Minkowski, qui consiste à retrouver le graphe d'une fonction convexe connaissant sa courbure gaussienne en tous points. Nous avons donc une interprétation inattendue d'une edp géométrique en l'associant à un problème d'optimisation combinatoire.

UN EXEMPLE D'APPLICATION DU TRANSPORT OPTIMAL EN GEOMETRIE

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d et B_1 la boule unité.

L'INEGALITE ISOPERIMETRIQUE DIT:

$$|\Omega|^{1-1/d} |B_1|^{1/d} \leq \frac{1}{d} |\partial\Omega|$$

UNE PREUVE PAR LE TRANSPORT OPTIMAL

On introduit les deux densités:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Omega|}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \beta(\mathbf{y}) = \frac{1}{|B_1|}, \quad \mathbf{y} \in B_1.$$

Soit $D\Phi$ l'application de transport optimal:

$$(\Omega, \alpha) \rightarrow (B_1, \beta), \quad \beta(D\Phi(\mathbf{x})) \det(D^2\Phi(\mathbf{x})) = \alpha(\mathbf{x})$$

$$\Rightarrow \det(D^2\Phi(\mathbf{x})) = \frac{|B_1|}{|\Omega|}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

L'INEGALITE ISOPERIMETRIQUE (SUITE)

On a $\mathbf{I} = \int_{\Omega} (\det(\mathbf{D}^2\Phi(\mathbf{x})))^{1/d} d\mathbf{x} = |\Omega|^{1-1/d} |\mathbf{B}_1|^{1/d}$
puisque $\det(\mathbf{D}^2\Phi(\mathbf{x})) = \frac{|\mathbf{B}_1|}{|\Omega|}$, $\mathbf{x} \in \Omega$.

Comme $(\det A)^{1/d} \leq 1/d \operatorname{Trace}(A)$ est vrai pour toute matrice symétrique semi-définie positive A , on déduit:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \int_{\Omega} (\det(\mathbf{D}^2\Phi(\mathbf{x})))^{1/d} d\mathbf{x} \leq \frac{1}{d} \int_{\Omega} \Delta\Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{d} \int_{\partial\Omega} \mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{d} \int_{\partial\Omega} d\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{d} |\partial\Omega| \end{aligned}$$

(puisque l'image de Ω par $D\Phi$ est la boule unité B_1). Ainsi

$$|\Omega|^{1-1/d} |\mathbf{B}_1|^{1/d} \leq \frac{1}{d} |\partial\Omega|$$

s'ensuit. En remontant les inégalités successives, on voit aussi que l'égalité n'a lieu que si Ω est une boule.

REFERENCES ET APPLICATIONS

1. Ouvrage de référence : Villani, Topics in optimal transportation, AMS, 2003, et aussi les revues et “lecture notes” d’Ambrosio, YB, Caffarelli, Gangbo et McCann, Evans, Urbas...
2. **REFORMULATIONS D’EDP DISSIPATIVES ET PARABOLIQUES** Otto, Comm. PDEs 23 (1998), Comm. Pure Appl. Math. 52 (1999), Comm. PDEs 26 (2001), Jordan, Kinderlehrer et Otto, SIAM J. Math. Anal. 29 (1998), Otto, Carrillo, McCann et Villani, Rev. Mat. Iberoamericana 19 (2003), Caceres, Carrillo et Toscani, Trans. AMS 357 (2005),...
3. **INEGALITES GEOMETRIQUES** (Brunn-Minkowski, Brascamp-Lieb, Prekopa-Leindler, Log-Sobolev, Bakry-Emery, Gagliardo-Nirenberg...) McCann, Adv. Math. 128 (1997), Barthe, Invent. Math. 134 (1998), Otto et Villani, J. Funct. Anal. 173 (2000), Bobkov et Ledoux, Geom. Funct. Anal. 10 (2000), Agueh, Ghoussoub et Kang, Geom. Funct. Anal. (2003), Cordero-Erausquin, Gangbo et Houdré, Contemp. Math 353, AMS 2004, Maggi et Villani, J. Geom. Anal. 15 (2005),...

REFERENCES ET APPLICATIONS (SUITE)

1. TRAITEMENT D'IMAGES ET PROBLEMES

INVERSES Benamou et YB, Numer. Math. 84 (2000), Gangbo et McCann, Quart. Appl. Math. 58 (2000), Haker, Tannenbaum et Kikinis, Mass Preserving Mappings and Image Registration, MICCAI 2001, Frisch, Matarrese, Mohayaee et Sobolevski, Nature 417 (2002), Delon (2005)...

2. TRANSPORT OPTIMAL AVEC COUTS NON QUADRATIQUES

de nombreuses contributions, notamment d'Ambrosio, Bouchitté, Buttazzo, Caffarelli, Evans, Feldman, Gangbo, Kirchheim, McCann, Trudinger, Wang, ...

3. TRANSPORT OPTIMAL ET IRRIGATION

Xia; Bernot, Caselles et Morel....

II:MODELISATION DES FLUIDES ET PLASMAS A L'AIDE DU TRANSPORT OPTIMAL

cf. YB, Comm. Math. Physics 2000, G. Loeper et YB, Geom. Funct.
Anal. 2004

BUT:

Dériver et approcher autant de modèles mécaniques et
physiques que possible en combinant des dynamiques
élémentaires au transport optimal.

UNE CARICATURE DE FLUIDES ET PLASMAS

LE MODELE:

1. N particules légères (“électrons”) se déplacent dans l’espace euclidien \mathbf{R}^d et occupent les positions : $X_1(t), \dots, X_N(t)$ au temps t ;
2. N particules lourdes (“ions”) sont immobiles et disposées aux points : Y_1, \dots, Y_N placés uniformément sur le cube unité;
3. Chaque particule légère X_i est attachée à une particule lourde Y_{σ_i} par un ressort (linéaire);
4. L’affectation : $\sigma : (1, \dots, N) \rightarrow (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ est dynamique de façon à garder minimale l’énergie potentielle totale des ressorts.

Equations obtenues:

$$\epsilon \frac{d^2}{dt^2} X_i + X_i = Y_{\sigma_i}, \quad i = 1, \dots, N$$

où $\epsilon > 0$ est fixé et $\sigma = \sigma(t)$ est actualisée pour garder minimale l'énergie potentielle totale des ressorts:

$$\frac{1}{2\epsilon} \{|X_1(t) - Y_{\sigma_1}|^2 + \dots + |X_N(t) - Y_{\sigma_N}|^2\}.$$

CONVERGENCE VERS LE MODELE D'EULER DES FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES

THEOREME (YB, Comm. Math. Physics 2000)

Pour des données initiales “bien préparées”, lorsque $N \rightarrow \infty$ et $\epsilon \rightarrow 0$ (avec $N\epsilon^{8d} \rightarrow \infty$),

le champ de vitesse (discret) généré par les particules légères, i.e.

$$\frac{dX_1(t)}{dt} \frac{1}{N} \delta_{X_1(t)} + \dots + \frac{dX_N(t)}{dt} \frac{1}{N} \delta_{X_N(t)}$$

converge vers le champ de vitesse d'un **FLUIDE PARFAIT INCOMPRESSIBLE** régi par les équations d'**EULER** (1755).

DU TRANSPORT OPTIMAL A LA MECANIQUE DES FLUIDES

Commentaire sur les EQUATIONS D'EULER :

Les équations introduites par Euler en 1755 ont une remarquable interprétation géométrique. Les mouvements de fluides parfaits incompressibles, dans un domaine D de l'espace euclidien \mathbf{R}^d , ne sont rien d'autres que les courbes géodésiques le long du groupe des difféomorphismes de D conservant le volume, pour la métrique induite par $L^2(D, \mathbf{R}^d)$.

Voir Arnold-Khesin, Topological methods in hydrodynamics, Springer 1998.

Explication du résultat de convergence : Du théorème de transport optimal, on voit que, lorsque $N \rightarrow \infty$, $\epsilon > 0$ restant fixé, le champ discret de densité

$$\frac{1}{N} \{ \delta_{X_1(t)} + \dots + \delta_{X_N(t)} \}$$

et le champ de vitesse associé converge respectivement vers des champs de densité et de vitesse continus, notés $\rho(t, x)$ et $v(t, x)$, régis par les équations d'

“EULER-MONGE-AMPERE”

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \phi, \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \det(\mathbf{I} + \mathbf{D}_x^2 \phi) = \rho$$

où $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d})$ et $\Phi(t, x) = \frac{|x|^2}{2} + \epsilon \phi(t, x)$ est solution convexe en x de l'équation de Monge-Ampère equation associée au transport optimal de la densité $\rho(t, x) dx$ vers la mesure de Lebesgue (normalisée) dx .

Quand ϵ est infinitésimal, le système de **EULER-MONGE-AMPERE** est asymptote au système d'**EULER POISSON**:

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \phi, \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \epsilon \Delta_x \phi = \rho - 1$$

qui décrit le mouvement d'un continuum d'électrons globalement neutralisés par un fond ionique uniforme. En effet,

$$\det(\delta_{ij} + \epsilon \partial_{x_i}^2 \phi) = 1 + \epsilon \Delta_x \phi + O(\epsilon^2)$$

Commentaire : Ainsi notre modèle de ressorts avec affectation optimale est une sorte de caricature de particules chargées (globalement neutres) en interaction coulombienne classique.

Finalement, quand ϵ tend vers zéro, la limite devient

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \phi, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \rho = \mathbf{1}$$

i.e. les équations d'**EULER** d'un fluide parfait incompressible.

Commentaire : Le lien entre les équations d'Euler et le transport optimal peut être établi de différentes façons. Voir: YB, Arch. Rational Mech. Anal. 138 (1997), Comm. Pure Appl. Math. 52 (1999), YB and Puel, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 8 (2002).

CONCLUSION

Le transport optimal est devenu un domaine de recherches très actif, notamment par les nouveaux liens qu'il a permis de tisser entre les EDP non-linéaires, l'analyse fonctionnelle, la géométrie et la théorie des probabilités. Un regard nouveau a pu être jeté sur de nombreux sujets classiques.

En particulier, plusieurs EDP clés, au fort contenu géométrique ou physique (MONGE-AMPERE, EULER, BORN-INFELD, MHD...), ont reçu un nouvel éclairage.

Reste un grand défi numérique: obtenir des algorithmes de calcul vraiment performant, à la hauteur de ceux que l'on connaît, par exemple, pour les EDP elliptiques linéaires.