Mathématiques appliquées à la biologie — Année 2005-2006
Université de Nice Sophia-Antipolis — Licence 1

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 DE LA FEUILLE 1

Question 4 :

On cherche une distribution stationnaire pour la chaîne de Markov dont la matrice de transition est

$$\mathbb{P} := \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}45 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

Posons $\Pi = (x\ y\ z)$ une telle distribution. Dire que Π est une distribution signifie que

$$x + y + z = 1, \tag{1}$$

et dire qu'elle est stationnaire signifie que $\Pi.\mathbb{P} = \Pi$. Si on effecte le calcul "vecteur.matrice" $\Pi.\mathbb{P}$, on obtient

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}45 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \\ (x\ y\ z) & \begin{pmatrix} 0{,}5x + 0{,}1y & 0{,}45x + 0{,}5y + 0{,}1z & 0{,}05x + 0{,}4y + 0{,}9z \end{pmatrix} \end{array}$$

L'équation $\Pi.\mathbb{P} = \Pi$ devient

$$0{,}5x + 0{,}1y = x \tag{2}$$

$$0{,}45x + 0{,}5y + 0{,}1z = y \tag{3}$$

$$0{,}05x + 0{,}4y + 0{,}9z = z \tag{4}$$

On se retrouve avec un système linéaire de 4 équations à 3 inconnues.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ 0{,}5x + 0{,}1y = x & (2) \\ 0{,}45x + 0{,}5y + 0{,}1z = y & (3) \\ 0{,}05x + 0{,}4y + 0{,}9z = z & (4) \end{cases}$$

Pour le résoudre, on procède par substitution, c'est-à-dire que l'on va écrire les variables en fonction des autres. Par exemple, si on multiplie l'équation (2) par 10, on trouve

$$5x + y = 10x \Longleftrightarrow \mathbf{y = 5x}.$$

Si on multiple les équations (3) et (4) par 100, on obtient

$$\begin{cases} 45x - 50y + 10z = 0 \\ 5x + 40y - 10z = 0. \end{cases}$$

Et si on substitue $y = 5x$, on trouve finalement

$$\begin{cases} -205x + 10z = 0 \\ 205x - 10z = 0, \end{cases}$$

ce qui donne une seule équation. Elle permet d'obtenir z en fonction de x. En divisant par 5, on a $\mathbf{2z = 41x}$. Pour conclure, on utilise l'équation (1), que l'on mutliplie par 2, ce qui donne

$$2x + 2y + 2z = 2 \Longleftrightarrow 2x + 10x + 41x = 2.$$

Au final, on a $53x = 2$ d'où $\underline{x = \frac{2}{53}}$. De $y = 5x$, on tire $\underline{y = \frac{10}{53}}$ et de $2z = 41x$, on tire $\underline{z = \frac{41}{53}}$.

La chaîne de Markov admet une unique distribution stationnaire

$$\boxed{\Pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{53} & \frac{10}{53} & \frac{41}{53} \end{pmatrix}}.$$