

UNSA 2004/2005, L2-maths, Partiel d'Algèbre du 5 avril 2005.

Durée : 1h30. Tout document interdit.

Une rédaction claire et précise sera appréciée.

1. On considère les éléments $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ du groupe symétrique S_4 . On pose $G_\sigma = \{\pi \in S_4 \mid \pi\sigma\pi^{-1} = \sigma\}$.

1.a. Déterminer le nombre d'inversions, la signature et l'ordre de σ et de τ . Décomposer σ en permutations cycliques à supports disjoints.

1.b. On pose $\sigma_1 = (1\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$. Trouver $\sigma_2 \in S_4$ telle que $\sigma = \sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$. Calculer $\tau\sigma_1\tau^{-1}$ et $\tau\sigma_2\tau^{-1}$. En déduire que $\tau \in G_\sigma$.

1.c. Montrer que G_σ un sous-groupe de S_4 . En déduire que G_σ contient au moins 4 éléments. Lesquels ?

1.d. Pour $\pi \in S_4$ on pose $\pi_1 = \pi\sigma_1\pi^{-1}$ et $\pi_2 = \pi\sigma_2\pi^{-1}$. Montrer que π_1 et π_2 sont des transpositions et que $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$. Montrer que si $\pi \in G_\sigma$ alors soit $(\pi_1, \pi_2) = (\sigma_1, \sigma_2)$ soit $(\pi_1, \pi_2) = (\sigma_2, \sigma_1)$. En déduire une description explicite de tous les éléments de G_σ .

2. On considère l'anneau $A = (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +, \cdot)$. On note A^\times le groupe des éléments inversibles de A .

2.a. Calculer l'ordre (multiplicatif) de tous les éléments de A^\times . Le groupe A^\times est-il cyclique ?

2.b. Expliciter un isomorphisme de groupes $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \rightarrow (A^\times, \cdot)$ pour un certain entier naturel n .

2.c. Trouver un entier naturel m tel que le groupe des éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ soit cyclique d'ordre 4.

3. Soit $j = e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$. On note $\bar{z} = a - bi \in \mathbb{C}$ le complexe conjugué de $z = a + bi \in \mathbb{C}$. En particulier, $\bar{j} = e^{-2\pi i/3}$. On pose $H = \{\pm 1, \pm j, \pm \bar{j}\}$.

3.a. Faites un dessin de H comme partie de \mathbb{C} .

3.b. Montrer que H est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \cdot) .

3.c. En écrivant $H = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$ pour un certain ordre sur les éléments de H (à déterminer), montrer que la multiplication par $e^{2\pi i/6}$ induit une permutation cyclique d'ordre 6 des éléments de H .

3.d. En gardant les notations de la question précédente, déterminer la permutation qui correspond à l'application $H \rightarrow H : z \mapsto \bar{z}$.

3.e. Hors barème : Déterminer le plus petit sous-groupe de S_6 contenant la permutation cyclique de 3.c et la permutation de 3.d. De quel groupe s'agit-il ?

BARÈME : 8 (2+2+2+2) + 7 (2.5+2+2.5) + 8 (1+2.5+2.5+2)

CORRIGÉ

1.a. En notant ν le nombre d'inversions on obtient

$$\begin{aligned}\nu(\sigma) &= \#\{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\} = 6 \\ \nu(\tau) &= \#\{(1,3), (2,3), (2,4)\} = 3 \\ \text{sgn}(\sigma) &= (-1)^{\nu(\sigma)} = 1, \text{sgn}(\tau) = (-1)^{\nu(\tau)} = -1 \\ \sigma^2 &= id_4 \implies \text{ord}(\sigma) = 2 \\ \tau^2 &= \sigma \implies \tau^4 = \sigma^2 = id_4 \implies \text{ord}(\tau) = 4 \\ \sigma &= (14)(23)\end{aligned}$$

1.b. Pour $\sigma_1 = (14)$ et $\sigma_2 = (23)$ on a $\sigma = \sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$ d'après 1.a et puisque deux permutations cycliques à supports disjoints commutent entre elles. De plus, on obtient

$$\begin{aligned}\tau\sigma_1\tau^{-1} &= (\tau(1)\tau(4)) = (23) = \sigma_2 \\ \tau\sigma_2\tau^{-1} &= (\tau(2)\tau(3)) = (41) = \sigma_1\end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \tau\sigma_1\sigma_2\tau^{-1} = \tau\sigma_1\tau^{-1}\tau\sigma_2\tau^{-1} = \sigma_2\sigma_1 = \sigma$$

et par conséquent $\tau \in G_\sigma$.

1.c. (i) Comme $id_4\sigma id_4^{-1} = \sigma$, on a $id_4 \in G_\sigma$.

(ii) Si $\pi \in G_\sigma$ alors $\sigma = \pi^{-1}\pi\sigma\pi^{-1}\pi = \pi^{-1}\sigma\pi$, d'où $\pi^{-1} \in G_\sigma$.

(iii) Si $\pi_1, \pi_2 \in G_\sigma$ alors $(\pi_1\pi_2)\sigma(\pi_1\pi_2)^{-1} = \pi_1\pi_2\sigma\pi_2^{-1}\pi_1^{-1} = \pi_1\sigma\pi_1^{-1} = \sigma$ et par conséquent $\pi_1\pi_2 \in G_\sigma$. Les propriétés (i)-(iii) expriment que G_σ est un sous-groupe de S_4 . D'après 1.b., $\tau \in G_\sigma$, donc toutes les puissances de τ appartiennent à G_σ . Comme τ est d'ordre 4 il y en a quatre : $\tau, \tau^2, \tau^3, id_4$.

1.d. Les conjugués $\pi_1 = \pi\sigma_1\pi^{-1} = (\pi(1)\pi(4))$ et $\pi_2 = \pi\sigma_2\pi^{-1} = (\pi(2)\pi(3))$ sont bien des transpositions. Comme $\{\pi(1), \pi(4)\} \cap \{\pi(2), \pi(3)\} = \emptyset$ elles sont à supports disjoints; par conséquent $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$. Si de plus $\pi \in G_\sigma$, alors σ s'écrit comme produit $\pi_1\pi_2$ de deux transpositions à supports disjoints. Cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près; comme $\sigma = \sigma_1\sigma_2$, on obtient donc soit $\pi_1 = \sigma_1$ et $\pi_2 = \sigma_2$ soit $\pi_1 = \sigma_2$ et $\pi_2 = \sigma_1$. Dans le premier cas, on a $(\pi(1)\pi(4)) = (14)$ et $(\pi(2)\pi(3)) = (23)$; dans le second cas, on a $(\pi(1)\pi(4)) = (23)$ et $(\pi(2)\pi(3)) = (14)$. Les deux cas correspondent chacun à 4 permutations; le premier cas aux permutations

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

le second cas aux permutations

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc (en gardant l'ordre des permutations ci-dessus):

$$G_\sigma = \{id_4, (1\ 4), (2\ 3), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3)(2\ 4)\}.$$

2.a. $A^\times = \{[x] \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \mid \text{pgcd}(x, 12) = 1\} = \{[1], [5], [7], [11]\}$. On a $\text{ord}([1]) = 1$ et $\text{ord}([5]) = \text{ord}([7]) = \text{ord}([11]) = 2$ puisque $[5]^2 = [7]^2 = [11]^2 = [1]$ dans l'anneau $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Le groupe A^\times contient 4 éléments, mais il ne contient aucun élément d'ordre 4; il n'est donc pas cyclique.

2.b. On pose $n = 2$ car le groupe additif $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ contient 4 éléments comme le groupe multiplicatif (A^\times, \cdot) . On définit une bijection

$$\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow A^\times$$

par $\phi([0]_2, [0]_2) = [1]_{12}$, $\phi([0]_2, [1]_2) = [5]_{12}$, $\phi([1]_2, [0]_2) = [7]_{12}$, $\phi([1]_2, [1]_2) = [11]_{12}$. Cette bijection est un (iso)morphisme de groupes : il applique l'élément neutre sur l'élément neutre et les éléments d'ordre 2 sur les éléments d'ordre 2. De plus, tout triplet (a, b, c) d'éléments distincts non nuls de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vérifie $a + b = c$; de même, tout triplet (r, s, t) d'éléments distincts non neutres de A^\times vérifie $rs = t$. Par conséquent, $\phi(a + b) = \phi(c) = \phi(a)\phi(b)$.

2.c. On pose $m = 5$. En effet, comme 5 est un nombre premier, le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ contient tous les éléments non nuls, i.e. les quatre éléments $[1], [2], [3], [4]$ (autrement dit : $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est un corps). Comme $[2]$ et $[3]$ sont d'ordre 4 (en effet, $[2]^2 = [3]^2 = -[1]$, donc $[2]^4 = [3]^4 = [1]$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$), ce groupe est cyclique d'ordre 4.

3.a. A défaut d'un dessin (trop difficile à dactylographier) décrivons l'ensemble $H = \{\pm 1, \pm j, \pm \bar{j}\}$. Tous les éléments se trouvent sur le cercle-unité et forment les sommets d'un hexagone régulier; en effet: $-\bar{j} = e^{2\pi i/6} =: z_1$, ensuite $j = e^{2\pi i/3} = z_1^2 =: z_2$, ensuite $-1 = e^{\pi i} = z_1^3 =: z_3$, ensuite $\bar{j} = e^{4\pi i/3} = z_1^4 =: z_4$, ensuite $-j = e^{5\pi i/3} = z_1^5 =: z_5$, enfin $1 = e^{2\pi i} = z_1^6 =: z_6$.

3.b. Il découle de 3.a. que H est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid z^6 = 1\}$ des racines sixièmes de l'unité, c'est donc le noyau du morphisme de groupes $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* : z \mapsto z^6$ et en tant que tel un sous-groupe de \mathbb{C}^* .

3.c. Avec les notations de 3.a., on pose $z_k = e^{2\pi i k/6}$, $k = 1, 2, \dots, 6$. Par conséquent, la multiplication par $e^{2\pi i/6}$ induit la permutation cyclique

$$(z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6)$$

des éléments de H dont l'ordre est bien 6.

3.d. La conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$ laisse fixe ± 1 et échange $\pm j$ avec $\pm \bar{j}$. Elle correspond donc à la permutation

$$(z_2 z_4)(z_1 z_5)$$

3.e. C'est le groupe diédral D_6 . Outre les six rotations d'angle $k\pi/3$, $k = 0, 1, \dots, 5$, il contient 6 symétries correspondant aux six axes de symétrie de l'hexagone régulier. Le groupe diédral D_6 est en fait le groupe des transformations orthogonales du plan qui appliquent l'hexagone régulier sur lui-même.