

Feuille d'exercices n° 2

1. On définit une opération $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : (a, b) \mapsto a \oplus b = \frac{ab}{a+b}$.

1.a. Montrer l'identité $\frac{1}{a \oplus b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

1.b. Montrer que \oplus est associatif et commutatif.

1.c. Montrer la loi de distributivité : $(a \oplus b)c = (ac) \oplus (bc)$ pour $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

1.d. Montrer que (\mathbb{R}_+^*, \oplus) n'a pas d'élément neutre. Calculer $\lim_{b \rightarrow \infty} a \oplus b$.

2.a. Montrer que l'ensemble $\{0, 1\}$ est une algèbre booléenne pour les opérations $\min = \wedge : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \longrightarrow \{0, 1\}$ et $\max = \vee : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \longrightarrow \{0, 1\}$. En quel sens ses opérations algébriques peuvent être assimilées aux opérations logiques "et" et "ou" ?

2.b. Soit E un ensemble. Montrer que l'ensemble $\{0, 1\}^E$ des applications $E \rightarrow \{0, 1\}$ peut être muni d'une structure d'algèbre booléenne.

2.c. Montrer que $\mathcal{P}(E)$ s'identifie à $\{0, 1\}^E$ en tant qu'algèbre booléenne. La fonction $f_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ associée à $A \in \mathcal{P}(E)$ s'appelle la fonction caractéristique de A .

2.d. Montrer que pour une application $g : E \rightarrow F$ et une partie B de F , on a $f_{g^{-1}(B)} = f_B \circ g : E \rightarrow \{0, 1\}$. En déduire que l'opération "image réciproque" $g^{-1} : \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ est un morphisme d'algèbres booléennes.

3. Un *anneau booléen* est un anneau commutatif tel que $x^2 = x$ pour $x \in A$.

3.a. Montrer que l'ensemble $\{0, 1\}$ est un anneau booléen pour les opérations $+$ et \cdot si l'on adopte la convention $1 + 1 = 0$.

3.b. Montrer que pour tout ensemble E , l'ensemble $\{0, 1\}^E$ est muni d'une structure d'anneau booléen vérifiant $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

3.c. Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$, exprimer $f_A + f_B$ comme fonction caractéristique d'une partie de E . De même pour $f_A f_B$. En déduire que $\mathcal{P}(E)$ possède une structure d'anneau booléen qu'on explicitera.

3.d. Exprimer les opérations \wedge et \vee sur $\{0, 1\}$ en fonction de $+$ et \cdot . En déduire que la structure d'algèbre booléenne sur $\mathcal{P}(E)$ est entièrement déterminée par la structure d'anneau booléen sur $\mathcal{P}(E)$, et vice versa.

MOTS-CLÉS : Associativité, commutativité, distributivité, élément neutre, algèbre booléenne, anneau booléen.