

## Feuille d'exercices n° 4

1.a. Déterminer le développement de Taylor à l'origine de la fonction

$$f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1+x}.$$

1.b. On pose  $q_0(t) = 1$  et  $q_n(t) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}$  pour  $n \geq 1$ . Montrer que le développement de Taylor de  $f$  s'identifie à  $\sum_{n=0}^{\infty} q_n(\frac{1}{2})X^n$ .

1.c. Les nombres de Catalan sont définis par la règle de récurrence:  $c_0 = 0, c_1 = 1$  et  $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$ . En fait,  $c_n$  compte le nombre de "parenthésages" distincts d'un mot de longueur  $n$ . On pose  $c(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ . Montrer que  $c(X)^2 + X = c(X)$ .

1.d. En déduire que  $c(X) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4X})$ .

1.e. En déduire la valeur de  $c_n$  en fonction de  $n$ .

2. Développer en série formelle à coefficients complexes la fraction rationnelle suivante :

$$f(X) = \frac{1}{X^2 - (3+i)X + 2(1+i)}.$$

3. Soit l'équation différentielle  $Xg''(X) = g(X)$ . On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des séries formelles à coefficients réels qui vérifient cette équation.

3.a. Montrer que  $\mathcal{S}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[[X]]$ .

3.b. Expliciter  $\mathcal{S}$ .

3.c. En déduire une base de  $\mathcal{S}$  et sa dimension.

4. On note  $(M_n(\mathbb{C}), +, \cdot, 0, Id_n)$  l'anneau des matrices  $n \times n$  à coefficients réels. On notera  $E_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$  la matrice ayant tous les coefficients nuls sauf celui d'indice  $ij$  qui vaut 1.

4.a. Montrer que  $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  forme une base vectorielle de  $M_n(\mathbb{C})$ . Montrer que le sous-espace engendré par les  $E_{ii}, i = 1, \dots, n$ , est un sous-anneau de  $M_n(\mathbb{C})$ . De même pour le sous-espace engendré par les  $E_{ij}$  pour  $n \geq i \geq j \geq 1$ .

4.b. Montrer que  $tr(AB) = tr(BA)$ . Montrer que si  $tr(AB) = 0$  pour tous  $A \in M_n(\mathbb{C})$  alors  $B = 0$ .

4.c. Montrer que pour  $A \in M_2(\mathbb{C})$ , on a  $\frac{1}{2}(tr(A)^2 - tr(A^2)) = det(A)$ .

4.d. Montrer que  $det(A - X \cdot Id_2) = X^2 - tr(A) \cdot X + det(A) \cdot Id_2$  pour  $A \in M_2(\mathbb{C})$ . Dans quel anneau cette identité a-t-elle lieu ?

MOTS-CLÉS : Nombres de Catalan, fraction rationnelle, élément simple, matrice (élémentaire, triangulaire, diagonale), trace, déterminant.