

Feuille d'exercices n° 5

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$

1.a. Quelle est la dimension de l'image de l'application linéaire $x \mapsto Ax$? Est-ce que A est inversible ? Si oui, déterminer A^{-1} .

1.b. Montrer qu'il existe $a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$ tels que $A^2 = a_2A + b_2I_3$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ tels que $A^n = a_nA + b_nI_3$.

1.c. Expliciter la matrice de l'application linéaire $x \mapsto Ax$ dans la base $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Exprimer a_n et b_n en fonction de n .

2. Soit ϕ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ -2x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$

2.a. Expliciter la matrice de ϕ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

2.b. Expliciter la matrice de ϕ dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

2.c. Montrer que ϕ est inversible et expliciter ϕ^{-1} .

3. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & b+c & bc \\ 1 & a+c & ac \\ 1 & a+b & ab \end{vmatrix}.$$

4. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $p_A(t) = \det(A - t \cdot I_n) \in \mathbb{R}[t]$.

4.a. Montrer que $p_A(t)$ est invariant par changement de base.

4.b. Montrer que pour $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A.v = \lambda v \Leftrightarrow v \in E_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(A - \lambda \cdot I_2) \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0$$

4.c. Calculer $p_A(t)$ pour une matrice diagonalisable A .

MOTS-CLÉS : Matrices, déterminant.