Feuille d'exercices n^o 7

1.a. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t). \end{cases}$

1.b. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t). \end{cases}$

2. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = 2z(t). \end{cases}$

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

3.a. Indiquer $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. En déduire $exp(A)$.

3.b. Trouver l'unique fonction dérivable $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ qui vérifie

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'(t) = -2y(t) + z(t) \\ y'(t) = -2y(t) \\ z'(t) = -2x(t) + 2y(t) - 3z(t). \end{cases}$$

3.c. Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une solution (non identiquement nulle) du système différentiel $\psi'(t) = A\psi(t)$. Calculer $\lim_{t\to\infty} \|\psi(t)\|$ et $\lim_{t\to-\infty} \|\psi(t)\|$.

4. Résoudre les équations différentielles suivantes:

4.a. $2y''(x) + 2y'(x) + y(x) = xe^{-x}$.
4.b. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = (x^2 + 1)e^x$.
4.c. $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \cos 2x$.
4.d. $y''(x) + y(x) = |x| + 1$.

5. On considère l'équation $y''(x) + 2(1 - \cos\theta)y'(x) + (5 - 4\cos\theta)y(x) = 0$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Réécrire cette équation différentielle comme un système différentiel $X' = A_\theta X$ pour une matrice $A_\theta \in M_2(\mathbb{R})$. Déterminer les $\theta \in \mathbb{R}$ pour lesquels les solutions $y(x)$ tendent vers 0 si x tend vers ∞.

6. Trouver toutes les solutions de l'equation $4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$. Indication: Chercher une solution formelle $y(x) = a_0 S(X)$ avec $S(X) \in \mathbb{R}[[X]]$. Identifier cette solution en distinguant les cas $x > 0$ et $x < 0$. Poser $y(x) = a(x)S(X)$, puis trouver et résoudre l'équation différentielle satisfaite par $a(x)$.

MOTS-CLÉS : Systèmes et équations différentiels.