Devoir à la maison
A rendre au plus tard le 26 Novembre 2009.
Le soin que vous apportez à votre rédaction sera pris en compte.

1. Injectivité. Surjectivité. Cardinal. Soient A et B deux ensembles finis. On notera $Inj(A,B)$ l'ensemble des applications injectives de A dans B, et $Surj(A,B)$ l'ensemble des applications surjectives de A dans B.

1.a. Soient $A = \{a_1, a_2\}$ et $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Expliciter $Inj(A,B)$, $Surj(A,B)$, ainsi que $Inj(B,A)$ et $Surj(B,A)$.

1.b. Montrer que $Inj(A,B)$ est vide si et seulement si $\text{card}(A) > \text{card}(B)$.

1.c. Montrer que $Surj(A,B)$ est vide si et seulement si $\text{card}(A) < \text{card}(B)$.

1.d. Montrer qui si A et B ont même cardinal alors $Inj(A,B) = Surj(A,B)$. Déterminer le cardinal de $Inj(A,B)$ dans ce cas.

1.e. On notera k le cardinal de A, et n le cardinal de B. Déterminer le cardinal de $Inj(A,B)$ pour $k \leq n$.

1.f. On notera k le cardinal de A. Quel est le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des parties de A ? Quel est le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}_m(A)$ des parties de cardinal m de A ? Quel est le cardinal de l'ensemble $Surj(A, \{0,1\})$? Justifier !

2. Diagonalisabilité de matrices. On considère les matrices réelles

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_m = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

où m est un paramètre réel.

2.a. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, diagonaliser-la.

2.b. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de B. La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, diagonaliser-la.

2.c. Trouver une matrice inversible $P \in Gl_3(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}BP$ ait un nombre minimal de coefficients non nuls.

2.d. Déterminer polynôme caractéristique et valeurs propres de C_m.

2.e. Pour quelles valeurs de m, la matrice C_m est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse !

2.f. Trouver les espaces propres de C_m dans le cas diagonalisable. Votre résultat reste-t-il vrai dans le cas non diagonalisable ?

Barème indicatif : Toutes les questions valent un 1/2 point.