

UNSA 2007/2008, L3-Variable complexe, Partiel du 29 octobre 2007.

Durée : 2h. Tout document interdit.

Une rédaction claire et précise sera appréciée.

BARÈME INDICATIF: 7 + 6 + 7

1.a. Quelles sont les racines du polynôme $z^2 - 2z + 2$?

1.b. Décomposer la fraction $\frac{1}{z^2-2z+2}$ en éléments simples.

1.c. Déterminer le développement de Taylor de $\frac{1}{z^2-2z+2}$ au voisinage de l'origine. Quel est son rayon de convergence R ?

1.d. Calculer $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z^2-2z+2}$ pour $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, en distinguant les cas $r < R$ et $r > R$.

2. On considère la série entière $s(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$.

2.a. Quel est le rayon de convergence de $s(z)$?

2.b. Calculer la dérivée $s'(z)$ et déterminer le développement de Taylor de $s'(z)$ au voisinage de $z_0 = \frac{1}{2}$.

2.c. En déduire le développement de Taylor de $s(z)$ au voisinage de $z_0 = \frac{1}{2}$. Quel est son rayon de convergence ?

2.d. Comparer les domaines de définition de la fonction analytique $s(z)$, obtenus en 2.a et en 2.c.

3. Pour $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose $B(z, p) = 1 + e^z + \dots + e^{z(p-1)}$.

3.a. Montrer que pour $p \geq 1$, les coefficients du développement de Taylor $B(z, p) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n(p)z^n}{n!}$ vérifient

$$b_n(p) = 0^n + 1^n + \dots + (p-1)^n.$$

Quel est le rayon de convergence du développement de Taylor de $B(z, p)$?

3.b. Etablir l'équation fonctionnelle $e^{zp} - 1 = B(z, p)(e^z - 1)$. En déduire pour $n \geq 1$, $p \geq 1$, la relation

$$p^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k(p).$$

3.c. Montrer par récurrence sur n l'existence de polynômes $b_n(x)$ vérifiant

$$x^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k(x).$$

3.d. En admettant que $B(z, x) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n(x)z^n}{n!} = \frac{e^{zx} - 1}{e^z - 1}$, expliciter la fonction $\beta(z) = \frac{\partial B(z, x)}{\partial x} \Big|_{x=0}$. Déterminer le développement de Taylor à l'origine et le rayon de convergence de $\beta(z)$. Déterminer récursivement les coefficients de $\beta(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{\beta_n z^n}{n!}$, (qu'on appelle *nombre de Bernoulli*) pour $n = 0, 1, 2, 3$.

CORRIGÉ.

BARÈME: EXERCICE 1 SUR 8 = 1 + 1,5 + 2,5 + 3 POINTS.

1.a. Les racines sont $1 \pm i$.

1.b. On pose

$$\frac{1}{z^2 - 2z + 2} = \frac{a}{z - (1 + i)} + \frac{b}{z - (1 - i)}.$$

En multipliant par le dénominateur et en identifiant les coefficients on obtient

$$a = -\frac{i}{2}, \quad b = \frac{i}{2}.$$

1.c. On obtient:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2 - 2z + 2} &= \frac{i}{2} \left(\frac{1}{(1 + i) - z} - \frac{1}{(1 - i) - z} \right) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{n \geq 0} z^n \left(\frac{1}{(1 + i)^{n+1}} - \frac{1}{(1 - i)^{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{\operatorname{Re}((1 + i)^{n+1})}{2^{n+1}} z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)}{(\sqrt{2})^{n+1}} z^n. \end{aligned}$$

Comme une fraction rationnelle est holomorphe en dehors des racines du dénominateur, le rayon de convergence de la série entière est le minimum des distances de ces racines à l'origine, i.e. $R = \min(|1 + i|, |1 - i|) = \sqrt{2}$. Par ailleurs, la règle d'Alembert donne ce rayon de convergence directement.

1.d. Si $r < \sqrt{2}$, l'image du lacet γ_r est contenue dans le disque $D_{\sqrt{2}}(0)$, dans lequel la fraction rationnelle est holomorphe. Le théorème de Cauchy donne alors:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z^2 - 2z + 2} = 0.$$

Si $r > \sqrt{2}$, le lacet γ_r contourne les deux racines (i.e. $1 \pm i \in D_r(0)$), d'où $\operatorname{Ind}_{\gamma_r}(1 \pm i) = \operatorname{Ind}_{\gamma_r}(0) = 1$ par la constance de $\operatorname{Ind}_{\gamma_r}(-)$ sur $D_r(0)$. Donc,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z^2 - 2z + 2} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ind}_{\gamma_r}(1 + i) + \frac{i}{2} \operatorname{Ind}_{\gamma_r}(1 - i) = 0.$$

BARÈME: EXERCICE 2 SUR 7 = 1 + 2 + 3 + 1 POINTS.

2.a. Le rayon de convergence s'obtient par la règle d'Alembert car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$$

existe et vaut 1. Donc le rayon de convergence est 1.

2.b. Dans $D_0(1)$ la dérivée $s'(z)$ de $s(z)$ se calcule terme par terme:

$$s'(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{nz^{n-1}}{n} = \sum_{n \geq 1} z^{n-1} = \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Le développement de Taylor en $\frac{1}{2}$ s'obtient alors par:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{2}{1-2(z-\frac{1}{2})} = \sum_{n \geq 0} 2^{n+1} (z - \frac{1}{2})^n.$$

2.c. Le rayon de convergence du développement de $s'(z)$ en $z_0 = \frac{1}{2}$ est $\frac{1}{2}$, donc cette série converge dans le disque $D_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})$. Dans ce disque, $s(z)$ peut être obtenu en intégrant le développement de $s'(z)$ terme par terme:

$$s(z) = s(\frac{1}{2}) + \int_{\frac{1}{2}}^z s'(\xi) d\xi = s(\frac{1}{2}) + \sum_{n \geq 0} \int_{\frac{1}{2}}^z 2^{n+1} (\xi - \frac{1}{2})^n d\xi.$$

Comme pour $1-x \in \mathbb{R}_*^+$, on a $s(x) = -\ln(1-x)$, il vient $s(\frac{1}{2}) = -\ln(\frac{1}{2}) = \ln(2)$, donc on obtient finalement pour $z \in D_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})$:

$$s(z) = \ln(2) + \sum_{n \geq 0} \frac{2^{n+1}}{n+1} (z - \frac{1}{2})^{n+1} = \ln(2) + \sum_{n > 0} \frac{2^n}{n} (z - \frac{1}{2})^n.$$

Le rayon de convergence en $\frac{1}{2}$ de $s(z)$ est le même que celui de $s'(z)$, i.e. $\frac{1}{2}$.

2.d. Le disque de convergence de $s(z)$ en $z_0 = 0$ contient strictement celui en $z_0 = \frac{1}{2}$, i.e. $D_1(0) \supset D_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})$. Ceci est dû à un "pôle" de $s(z)$ en $z = 1$.

BARÈME: EXERCICE 3 SUR 8 = 2 + 2 + 1,5 + 2,5 POINTS.

3.a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $z \mapsto e^{kz}$ est holomorphe dans \mathbb{C} et possède donc un développement de Taylor avec un rayon de convergence ∞ :

$$e^{kz} = \sum_{n \geq 0} \frac{(kz)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{k^n}{n!} z^n.$$

Comme $B(z, p)$ est somme de p séries entières ayant un rayon de convergence ∞ , le développement de Taylor de $B(z, p)$ est lui-même une série entière ayant un rayon de convergence ∞ :

$$B(z, p) = \sum_{n \geq 0} \frac{0^n}{n!} z^n + \sum_{n \geq 0} \frac{1^n}{n!} z^n + \dots + \sum_{n \geq 0} \frac{(p-1)^n}{n!} z^n = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{0^n}{n!} + \dots + \frac{(p-1)^n}{n!} \right) z^n.$$

Par identification des coefficients on obtient l'expression requise pour $b_n(p)$.

3.b. $B(z, p)(e^z - 1) = (1 + e^z + (e^z)^2 + \dots + (e^z)^{p-1})(e^z - 1) = (e^z)^p - 1 = e^{zp} - 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En substituant les développements de Taylor:

$$\sum_{n>0} \frac{p^n}{n!} z^n = \left(\sum_{k \geq 0} \frac{b_k(p)}{k!} z^k \right) \left(\sum_{m>0} \frac{1}{m!} z^m \right).$$

Par identification des coefficients, on obtient pour tous $p \geq 1$, $n \geq 1$:

$$\frac{p^n}{n!} = \sum_{k+m=n, m>0} \frac{b_k(p)}{k!m!} \quad \text{resp.} \quad p^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!b_k(p)}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k(p).$$

3.c. On pose $b_0(x) = x$ ce qui vérifie $x^1 = \binom{1}{0} b_0(x)$. Supposons par récurrence que nous ayons déjà défini des polynômes $b_0(x), b_1(x), \dots, b_{n-1}(x)$ de degrés $1, 2, \dots, n$ et vérifiant

$$x^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k(x).$$

Alors le polynôme $b_n(x)$ de degré $n+1$ est obtenu par la formule:

$$b_n(x) = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k(x) \right).$$

3.d. La fonction $B(z, x) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n(x)}{n!} z^n = \frac{e^{zx} - 1}{e^z - 1}$ est une fonction de deux variables complexes, qui est holomorphe en z et en x , pourvu que le dénominateur ne s'annule pas, i.e. $z \notin 2\pi i\mathbb{Z}$. On obtient

$$\beta(z) = \frac{\partial B(z, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} \Big|_{x=0} = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{b'_n(0)}{n!} z^n.$$

Un développement limité de la fonction $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$ montre qu'elle est holomorphe en $z = 0$ (ici, numérateur et dénominateur s'annulent simultanément). Il s'en suit que le rayon de convergence du développement de Taylor de $\beta(z)$ est la distance minimale à l'origine des racines non nulles de $e^z - 1$, c'est donc 2π .

Les coefficients $\beta_n = b'_n(0)$ se déduisent d'après 3.c de la relation de récurrence

$$nx^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b'_k(x).$$

Donc $\beta_0 = 1$ et pour $n > 0$, β_n s'obtient par la relation

$$0 = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \beta_k.$$

Par conséquent: $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{6}$, $\beta_3 = 0$.