

Feuille d'exercices n° 3

Les exercices 1 et 2 font partie d'un contrôle de 55 minutes
ayant lieu les 20 et 21 octobre 2008.

1. On définit une loi de composition interne \star sur \mathbb{R} par

$$a \star b = a + b - ab.$$

1.a. Montrer l'identité $1 - a \star b = (1 - a)(1 - b)$.

1.b. Montrer que \star est associatif et commutatif.

1.c. Déterminer l'élément neutre e de (\mathbb{R}, \star) . Déterminer l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $a \star b = b \star a = e$.

2.a. Déterminer le développement de Taylor à l'origine de la fonction

$$f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1+x}.$$

2.b. On pose $q_0(t) = 1$ et $q_n(t) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n}$ pour $n \geq 1$. Montrer que le développement de Taylor de f s'identifie à $\sum_{n=0}^{\infty} q_n(\frac{1}{2})X^n$.

2.c. Les nombres de Catalan sont définis par la règle de récurrence: $c_0 = 0, c_1 = 1$ et $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$. En fait, c_n compte le nombre de "parenthésages" distincts d'un mot de longueur n . On pose $c(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$. Montrer que $c(X)^2 + X = c(X)$.

2.d. En déduire que $c(X) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4X})$.

2.e. En déduire la valeur de c_n en fonction de n .

3. Développer en série formelle à coefficients complexes la fraction rationnelle suivante :

$$f(X) = \frac{1}{X^2 - (3+i)X + 2(1+i)}.$$

4. Soit l'équation différentielle (dite de Bessel)

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0,$$

où $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

4.a. Montrer que la seule série formelle solution est la série nulle.

4.b. Chercher des solutions non nulles sous la forme $X^\lambda S(X)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $S(X) \in \mathbb{R}[[X]]$ est une série formelle.

5. Soit l'équation différentielle $Xg''(X) = g(X)$. On note \mathcal{S} l'ensemble des séries formelles à coefficients réels qui vérifient cette équation.

5.a. Montrer que \mathcal{S} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[[X]]$.

5.b. Expliciter \mathcal{S} .

5.c. En déduire une base de \mathcal{S} et sa dimension.

6. Soit l'équation diophantienne $x + 2y + 3z = n$, d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$, où $n \in \mathbb{N}$ est fixé. Le but est de calculer le nombre $p(n)$ de solutions de cette équation, en fonction de l'entier n . On notera $p(X) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)X^n \in \mathbb{C}[[X]]$.

6.a. Calculer $p(0)$, $p(1)$ et $p(2)$.

6.b. Montrer que $p(X) = \frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^3)}$.

6.c. Décomposer $p(X)$ en éléments simples au-dessus de \mathbb{C} .

6.d. En déduire la valeur de $p(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. On note $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, 0, Id_n)$ l'anneau des matrices $n \times n$ à coefficients réels. La matrice élémentaire $E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ est la matrice ayant tous les coefficients nuls sauf celui d'indice ij qui vaut 1.

7.a. Montrer que $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ forme une base vectorielle de $M_n(\mathbb{R})$.

7.b. Montrer que le sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ engendré par les E_{ii} pour $i = 1, \dots, n$ est un sous-anneau de $M_n(\mathbb{R})$.

7.c. De même pour le sous-espace engendré par les E_{ij} pour $n \geq i \geq j \geq 1$.

7.d. Montrer que pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $tr(AB) = tr(BA)$. Montrer que $(A, B) \mapsto tr(AB)$ est linéaire en A et en B . Montrer que si $tr(AB) = 0$ pour tous $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors $B = 0$.

7.e. Montrer que pour $n = 2$ et $A \in M_2(\mathbb{R})$, on a

$$\frac{1}{2}(tr(A)^2 - tr(A^2)) = det(A).$$

7.f. Montrer que pour $n = 2$ et $A \in M_2(\mathbb{R})$, on a dans $M_2(\mathbb{R})[X]$:

$$det(A - X \cdot Id_2) = X^2 - tr(A) \cdot X + det(A) \cdot Id_2.$$

MOTS-CLÉS : Nombres de Catalan, série génératrice, fraction rationnelle, élément simple, matrice (élémentaire, triangulaire, diagonale), trace, déterminant.