

Partiel du 28 octobre 2008
Durée : 1h30. Tous documents interdits.

1. On définit une loi de composition interne \oplus sur $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ par

$$a \oplus b = \frac{ab}{a+b}$$

1.a. Montrer l'identité $\frac{1}{a \oplus b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

1.b. Montrer que \oplus est associatif et commutatif.

1.c. Montrer la loi de distributivité : $(a \oplus b)c = (ac) \oplus (bc)$ pour $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

1.d. Montrer que (\mathbb{R}_+^*, \oplus) n'a pas d'élément neutre. Calculer $\lim_{b \rightarrow \infty} a \oplus b$.

1.e. On pose $\tilde{\mathbb{R}} = (\mathbb{R} - \{0\}) \cup \{\infty\}$. Montrer que $(\tilde{\mathbb{R}}, \oplus, \cdot, \infty, 1)$ forme un anneau commutatif si l'on pose $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$ pour tout $a \in \tilde{\mathbb{R}}$. En particulier, expliciter pour tout $a \in \tilde{\mathbb{R}}$ un élément $b \in \tilde{\mathbb{R}}$ tel que $a \oplus b = \infty$.

1.f. Trouver une bijection $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ compatible avec les structures d'anneaux de $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ et de $(\tilde{\mathbb{R}}, \oplus, \cdot, \infty, 1)$.

2. Soit l'équation différentielle $S'(X) = \frac{1}{1+X}$ (*).

2.a. Trouver l'unique solution de (*) dans $\mathbb{C}[[X]]$ qui vérifie $S(0) = 0$.

2.b. Montrer l'identité $S(X) + S(-X) = S(-X^2)$ dans $\mathbb{C}[[X]]$.

2.c. On pose $T(X) = S(X) - S(-X)$. Montrer que $T'(X) = \frac{2}{1-X^2}$ dans $\mathbb{C}[[X]]$.

2.d. Retrouver 2.b et 2.c. en utilisant que $S(X)$ s'identifie au développement de Taylor à l'origine d'une fonction bien connue.

3. On considère la suite de nombres $(s_n)_{n \geq 0}$ définie par la règle de récurrence

$$s_0 = 1, s_1 = 0, s_n = \frac{1}{2}(s_{n-1} + s_{n-2}), n \geq 2.$$

On pose $s(X) = \sum_{n \geq 0} s_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$.

3.a. Déterminer s_n pour $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

3.b. Montrer que $s(X) = \frac{X-2}{X^2+X-2}$ dans $\mathbb{C}[[X]]$.

3.c. Décomposer $\frac{X-2}{X^2+X-2}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}[[X]]$.

3.d. En déduire une formule explicite pour s_n , ainsi que la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

BARÈME INDICATIF : 6 + 6 + 8 = 20 pts