UNSA 2007/2008, L3-Variable complexe, Examen du 13 décembre 2007.

Durée : 3h. Tout document interdit.
Une rédaction claire et précise sera appréciée.

BARÊME INDICATIF: 5 + 7 + 8

1. Questions de cours. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que le disque fermé $\bar{D}_R(z_0)$ de centre z_0 et de rayon R est contenu dans U. On note γ_{R,z_0} le lacet défini par $\gamma_{R,z_0}(t) = z_0 + Re^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$.

1.a. Que peut-on dire sur le maximum du module $|f|$ de f sur $\bar{D}_R(z_0)$?

1.b. Que peut-on dire sur le rayon de convergence du développement de Taylor de f en z_0 ?

1.c. Que vaut l'intégrale $\int_{\gamma_{R,z_0}} f(z)dz$? Justifier !

1.d. Que vaut l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,z_0}} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$? Justifier !

1.e. Quelle est la nature topologique de l'ensemble $R_f = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$? Même question pour $R_f \cap \bar{D}_R(z_0)$. Que peut-on en déduire sur le domaine de définition et la dérivabilité de la fonction $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)}$?

1.f. En supposant que le bord de $\bar{D}_R(z_0)$ ne contient aucune racine de f, que vaut l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,z_0}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$?

2. On considère la fonction holomorphe $f : \mathbb{C}\backslash\{\pm i\} \to \mathbb{C} : z \mapsto \frac{e^{iz}}{1+z^2}$.

2.a. Rappeler pourquoi pour deux fonctions g, h holomorphes au voisinage d'une racine simple z_0 de h, on a $Res(\frac{g}{h}, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

2.b. Calculer à l'aide de **2.a** les résidus $Res(f, i)$ et $Res(f, -i)$.

2.c. Dessiner les lacets $\Gamma_R^{\pm} : [-1, 2] \to \mathbb{C}$ définis par $\Gamma_R^{\pm}(t) = Rt$ pour $t \in [-1, 1]$ et $\Gamma_R^{\pm}(t) = Re^{\pm\pi i(t-1)}$ pour $t \in [1, 2]$. Déterminer la valeur des intégrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R^+} f(z)dz \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R^-} f(z)dz$$

en fonction de $R > 0$ quand elles sont bien définies.

2.d. Montrer que $|\int_{\Gamma^+_{R|[1,2]}} f(z)dz| \leq \frac{\pi R}{R^2-1}$ pour $R > 1$. En utilisant que $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, en déduire la valeur des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{1+x^2}dx.$$

3. Nombres de Bernoulli et fonction ζ de Riemann. On rappelle que les nombres de Bernoulli B_n, $n \geq 0$, sont définis par le développement de Taylor

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{z^n}{n!},$$

et qu'ils vérifient la relation de récurrence $B_0 = 1$ et pour $n > 0$,

$$(n+1)B_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k.$$

3.a. Déterminer B_n pour $n = 1, 2, \ldots, 6$.

3.b. Montrer que la fonction $z \mapsto \operatorname{cotan}(z)$ est holomorphe en dehors de l'ensemble $\mathbb{Z}\pi$ et que les éléments de $\mathbb{Z}\pi$ sont des pôles simples de $\operatorname{cotan}(z)$. Déterminer à l'aide de **2.a** les résidus $Res(\operatorname{cotan}(z), k\pi)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

3.c. Montrer que $\operatorname{cotan}(z) = i\,\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}$. En déduire que

$$z \operatorname{cotan}(z) = \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} + iz = \sum_{n \geq 0} (-1)^n B_{2n} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$$

en précisant pourquoi les termes de degré impair du développement de Taylor sont nuls. En déduire le développement de Laurent de $\operatorname{cotan}(z)$ à l'origine.

3.d. On pose $c_n(z) = \frac{\operatorname{cotan}(z)}{z^{2n}}$, $n \geq 0$. Déduire de **3.c** le développement de Laurent de $c_n(z)$ à l'origine. En déduire que pour $n > 0$, le résidu $c_{n,0} = Res(c_n(z), 0)$ s'obtient par

$$c_{n,0} = (-1)^n B_{2n} \frac{2^{2n}}{(2n)!}.$$

3.e. Montrer que $\mathbb{Z}\pi$ est l'ensemble des pôles de la fonction $c_n(z)$. Lesquels sont simples ? Déterminer à l'aide de **2.a** les résidus $c_{n,k} = Res(c_n(z), k\pi)$ pour $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^*$. Expliquer pourquoi pour $k\pi < R < (k+1)\pi$, on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,0}} c_n(z) dz = \sum_{-k \leq j \leq k} c_{n,j}.$$

3.f. En faisant tendre R vers ∞, déduire de **3.d** et **3.e** que pour $n > 0$,

$$\zeta(2n) \overset{def}{=} \sum_{k \geq 1} k^{-2n} = (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{2} \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}.$$

A l'aide de **3.a**, en déduire les valeurs $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$.

Corrigé.

Exercice 1 noté sur 6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 pts.

1.a. Selon le principe du maximum, le module $|f|$ de la restriction de f à un disque fermé, atteint son maximum sur le *bord* de ce disque.

1.b. Comme f est analytique, le rayon de convergence du développement de Taylor de f en z_0 est non nul; il est *au moins* égal au rayon du plus grand disque centré en z_0 et contenu dans U; en particulier, il est supérieur à R.

1.c. D'après le théorème de Cauchy, l'intégrale $\int_{\gamma_{R,z_0}} f(z)dz$ est nulle. En effet, la fonction f admet une primitive dans un ouvert contenant l'image du lacet γ_{R,z_0}, et la définition de l'intégrale implique alors que celle-ci est nulle.

1.d. On a la formule $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,z_0}} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = Ind_{\gamma_{R,z_0}}(z_0)\cdot f(z_0) = f(z_0)$ car le lacet γ_{R,z_0} contourne le point z_0 une fois dans le sens positif.

1.e. Comme les racines d'une fonction holomorphe sont *isolées*, l'ensemble des racines R_f est une partie *discrète* de U et de ce fait au plus dénombrable. Comme $\bar{D}_R(z_0)$ est compact, l'intersection $R_f \cap \bar{D}_R(z_0)$ est à la fois compacte et discrète, donc finie. Comme la dérivée d'une fonction holomorphe est holomorphe, la fonction $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)}$ est holomorphe en dehors de R_f.

1.f. On a la formule

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,z_0}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z\in R_f\cap D_R(z_0)} Ind_{\gamma_{R,z_0}}(z)o(f,z) = \sum_{z\in R_f\cap D_R(z_0)} o(f,z)$$

où $o(f,z)$ désigne la multiplicité de la racine z de f. L'intégrale calcule donc le nombre de racines de f dans le disque $D_R(z_0)$, comptées avec leur multiplicité.

Exercice 2 noté sur 7.5 = 1.5 + 2 + 2 + 2 pts.

2.a. La fraction $\frac{g}{h}$ a un pôle d'ordre au plus 1 en z_0; son développement de Laurent en z_0 s'écrit donc

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n\geq 0} c_n(z-z_0)^n,$$

et par définition $Res(\frac{g}{h}, z_0) = c_{-1}$. Il s'en suit que ce résidu s'identifie à $\lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

2.b. Comme les racines $\pm i$ de $1+z^2$ sont simples, on peut appliquer **2.a** et on obtient

$$Res(f,i) = \frac{e^{-1}}{2i} \quad \text{et} \quad Res(f,-i) = \frac{e}{-2i}.$$

2.c. Le lacet Γ_R^+ parcourt d'abord le segment $[-R,R]$, ensuite le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R. Le lacet Γ_R^- parcourt d'abord le segment $[-R,R]$, ensuite le demi-cercle inférieur de centre 0 et de rayon R. Si $R<1$, les deux lacets ne contournent ni i ni $-i$. Si $R > 1$, le lacet Γ_R^+ contourne i dans le sens positif, mais ne contourne pas $-i$. Si $R > 1$, le lacet Γ_R^- contourne $-i$ dans le sens *négatif*, mais ne contourne pas i. On obtient donc les formules

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R^+} f(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{si } R < 1, \\ \frac{e^{-1}}{2i} & \text{si } R > 1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R^-} f(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{si } R < 1, \\ \frac{e}{2i} & \text{si } R > 1. \end{cases}$$

2.d. La longueur d'un demi-cercle de rayon R est πR, d'où la majoration du module de l'intégrale $I_2(R) = \int_{\Gamma^+_{R|[1,2]}} f(z)dz$ par

$$|I_2(R)| \leq \pi R \sup_{z \in Re^{\pi i[0,1]}} \frac{|e^{iz}|}{|1+z^2|}.$$

Or, $|e^{iz}| = |e^{i(Re(z)+iIm(z))}| = e^{-Im(z)} \leq 1$ pour $z \in Re^{\pi i[0,1]}$, et $|1+z^2| \geq |1-|z^2|| = |1-R^2|$ pour $z \in Re^{\pi i[0,1]}$. Par conséquent, pour $R > 1$ on obtient:

$$|I_2(R)| \leq \frac{\pi R}{R^2-1}.$$

En posant $I_1(R) = \int_{[-R,R]} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}dx}{1+x^2}$, on a pour $R > 1$:

$$2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \int_{\Gamma_R^+} f(z)dz = I_1(R) + I_2(R).$$

Comme $\lim_{R\to\infty} I_2(R) = 0$ et $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, il vient finalement:

$$\frac{\pi}{e} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{1+x^2}dx.$$

Autrement dit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{e} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{1+x^2}dx = 0.$$

Exercice 3 noté sur 8.5 = 1 + 1.5 + 1.5 + 1 + 2 + 1.5.

3.a. On a $(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42})$.

3.b. La fonction $\text{cotan}(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ est holomorphe en dehors des racines de $\sin(z)$, qui constituent l'ensemble $\mathbb{Z}\pi$. Comme en tout $k\pi \in \mathbb{Z}\pi$, la dérivée $\sin'(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ est non nulle, les pôles de $\text{cotan}(z)$ sont simples, et on peut appliquer **2.a**:

$$Res(\text{cotan}(z), k\pi) = \frac{\cos(k\pi)}{\cos(k\pi)} = 1 \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.$$

3.c. Les identités trigonométriques $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ et $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ impliquent $\mathrm{cotan}(z) = i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}$. Par conséquent:

$$z\,\mathrm{cotan}(z) = iz\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = iz + \frac{2iz}{e^{2iz}-1} = iz + \sum_{n\geq 0} B_n \frac{(2iz)^n}{n!}.$$

Comme la fonction $z \mapsto z\,\mathrm{cotan}(z)$ est paire, les termes de degré impair de son développement de Taylor à l'origine sont nuls. Il s'ensuit que

$$z\,\mathrm{cotan}(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n B_{2n} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!},$$

que $B_1 = -\frac{1}{2}$, et que $B_{2n+1} = 0$ pour $n > 0$, confirmant les calculs faits en **3.a**. En divisant par z, on obtient le développement de Laurent à l'origine

$$\mathrm{cotan}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n>0} (-1)^n B_{2n} \frac{2^{2n} z^{2n-1}}{(2n)!}$$

confirmant le calcul du résidu $Res(cotan(z), 0) = 1$ fait en **3.b**.

3.d. Le développement de Laurent à l'origine de $c_n(z) = \frac{\mathrm{cotan}(z)}{z^{2n}}$ est

$$c_n(z) = \frac{1}{z^{2n+1}} + \sum_{k>0} (-1)^k B_{2k} \frac{2^{2k} z^{2(k-n)-1}}{(2k)!}.$$

Le résidu $c_{n,0} = Res(c_n(z), 0)$ est le coefficient du terme de degré -1, i.e. le coefficient pour $k = n$, i.e. $(-1)^n B_{2n} \frac{2^{2n}}{(2n)!}$.

3.e. Les pôles de $c_n(z)$ sont les racines de $z^{2n}\sin(z)$, ce sont donc les éléments de $\mathbb{Z}\pi$. Si $k\pi \neq 0$, le pôle est simple, tandis que l'origine est un pôle d'ordre $2n + 1$ d'après **3.d**. A l'aide de **2.a** on obtient donc pour $(k, n) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$c_{n,k} = Res(c_n(z), k\pi) = \frac{\cos(k\pi)}{(k\pi)^{2n}\cos(k\pi)} = \frac{1}{(k\pi)^{2n}}.$$

Le théorème des résidus donne alors pour $k\pi < R < (k + 1)\pi$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,0}} c_n(z)dz = \sum_{j\pi\in D_R(0)} Ind_{\gamma_{R,0}}(j\pi) Res(c_n(z), j\pi) = \sum_{-k\leq j\leq k} c_{n,j},$$

puisque les pôles contenus dans $D_R(0)$ sont précisément les $j\pi$ tels que $-k \leq j \leq k$, et que le lacet $\gamma_{R,0}$ les contourne une fois dans le sens positif.

3.f. Comme $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{R,0}} c_n(z)dz = 0$, on obtient $0 = \sum_{-\infty}^{\infty} c_{n,j}$, d'où

$$(-1)^n B_{2n}\frac{2^{2n}}{(2n)!} = c_{n,0} = -2\sum_{k>0}\frac{1}{(k\pi)^{2n}} \text{ i.e. } \sum_{k>0}\frac{1}{k^{2n}} = (-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{2}\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}.$$

On en tire à l'aide de **3.a** que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ et $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.