UNSA 2008/2009, L3-Variable complexe, Examen du 5 mai 2009.

Durée : 2h. Tout document interdit.
Une rédaction claire et précise sera appréciée.

Barême : 7 + 7 + 9 =
(1,5+1,5+1,5+2,5)+(1+2+2+2)+(1+1,5+2+1,5+1,5+1,5)

1.a. Soient f, g des fonctions holomorphes définies sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. On suppose que g a une racine simple en $z_0 \in U$. Montrer que $\mathrm{Res}(\frac{f}{g}, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$.

1.b. Déterminer $\mathrm{Res}(\frac{1+z^4}{1+z^6}, w_k)$ pour $w_k = e^{(2k-1)\pi i/6}$ et $k = 1, 2, \ldots, 6$.

1.c. Pour $R \in \mathbb{R}_+^*$ soit $\gamma_R : [0,1] \to \mathbb{C} : t \mapsto Re^{\pi i t}$. Montrer que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1+z^4}{1+z^6} dz = 0.$$

1.d. Déduire du théorème des résidus que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^4}{1+x^6} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}\left(\frac{1+z^4}{1+z^6}, w_k\right).$$

En déduire la valeur de l'intégrale.

2.a. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Rappeler pourquoi si f est injective alors l'image $V = f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, et la fonction réciproque $f^{-1} : V \to U$ est holomorphe. Dans ce cas on dit que la fonction restreinte $f : U \to V$ est *biholomorphe*.

2.b. Montrer que $z \mapsto z^2$ définit une fonction biholomorphe

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\} \to \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-.$$

2.c. On pose $W = \mathbb{C}\backslash\{\lambda i \in \mathbb{C} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \geq 1\}$. Montrer que $z \mapsto \frac{1+iz}{1-iz}$ définit une fonction biholomorphe $W \to \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ dont on explicitera la fonction réciproque.

2.d. Rappeler la définition d'un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ est-il simplement connexe ? Déduire de ce qui précède que W est simplement connexe.

3. Soit $U = \{z \in \mathbb{C} \,|\, -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}(z) < \frac{\pi}{2}\}$ et $W = \mathbb{C}\backslash\{\lambda i \in \mathbb{C} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \geq 1\}$.

3.a. Montrer que $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ admet une primitive sur W. On pourra utiliser le résultat de **2.d**. La primitive qui s'annule en l'origine sera notée F.

3.b. Montrer que $F(\tan(z)) = z$ pour $z \in U$ en admettant que $\tan(U) = W$.

3.c. Calculer le développement de Taylor à l'origine de F et déterminer son rayon de convergence.

3.d. Montrer que si $\mathrm{Re}(z) > 0$ alors $F(z) + F(\frac{1}{z}) = \frac{\pi}{2}$. Qu'en est-il si $\mathrm{Re}(z) < 0$?

3.e. Montrer que $G(z) = \frac{1}{2i} \ln_0 \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$ est définie et holomorphe sur W. On pourra utiliser le résultat de **2.c**. Puis montrer que F et G coïncident sur W.

3.f. Calculer $\mathrm{Res}(f, i)$ et $\mathrm{Res}(f, -i)$. En déduire qu'il n'existe pas de prolongement analytique de F à $\mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$.

Corrigé.

1.a. La fonction $h(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$ est holomorphe sur $U\backslash\{z_0\}$. Comme

$$\lim_{z \to z_0} h(z) = g'(z_0),$$

h s'étend en une fonction holomorphe sur U. Le développement de Taylor en z_0 de la fonction holomorphe $z \mapsto (z - z_0)\frac{f(z)}{g(z)}$ s'écrit $\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$ avec $c_0 = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$. Par conséquent, le développement de Laurent en z_0 de $\frac{f}{g}$ s'écrit $\frac{c_0}{z-z_0} + c_1 + c_2(z - z_0) + \cdots$ d'où $\mathrm{Res}(\frac{f}{g}, z_0) = c_0 = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$.

1.b. On a $w_k^6 = e^{(2k-1)\pi i} = -1$. Il s'en suit que les ω_k, $k = 1, \ldots, 6$, sont les six racines simples du polynôme $1 + z^6$. En appliquant **1.a** on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\left(\frac{1+z^4}{1+z^6}, \omega_k\right) &= \frac{1+\omega_k^4}{6\omega_k^5} = \frac{1}{6}(\omega_k^{-5} + \omega_k^{-1}) = -\frac{1}{6}(\omega_k - \bar{\omega}_k) \\ &= -\frac{i}{3}\mathrm{Im}(\omega_k) = -\frac{i}{3}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{6}\right), \quad k = 1, \ldots, 6. \end{aligned}$$

1.c. En appliquant la définition et les inégalités triangulaires on obtient:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} \frac{1+z^4}{1+z^6} dz \right| &= \left| \int_0^1 \frac{(1+R^4 e^{4\pi i t}) R\pi i e^{\pi i t}}{1+R^6 e^{6\pi i t}} dt \right| \\ &\leq \int_0^1 R\pi \left| \frac{1+R^4 e^{4\pi i t}}{1+R^6 e^{6\pi i t}} \right| dt \\ &\leq \int_0^1 R\pi \frac{1+R^4}{R^6-1} dt \quad (R > 1) \\ &= \frac{R\pi(1+R^4)}{R^6-1} \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

1.d. En composant le segment $[-R, R]$ avec le chemin curviligne γ_R on obtient un *lacet* qu'on notera λ_R. Ce lacet parcourt dans le sens positif le bord du demi-disque supérieur centré en 0 et de rayon R.

Pour $R > 1$, l'indice des racines $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ par rapport au lacet λ_R est $+1$ tandis que l'indice des racines $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ par rapport au lacet λ_R est nul. Le théorème des résidus donne alors pour $R > 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_R}\frac{1+z^4}{1+z^6}dz &= \sum_{k=1}^{6}\mathrm{Ind}_{\lambda_R}(\omega_k)\mathrm{Res}\left(\frac{1+z^4}{1+z^6},\omega_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{3}\mathrm{Res}\left(\frac{1+z^4}{1+z^6},\omega_k\right)\\ &\overset{\mathbf{1.b}}{=} -\frac{i}{3}\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right) = -\frac{2i}{3}. \qquad (*)\end{aligned}$$

En passant à la limite $R \to \infty$ on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x^4}{1+x^6}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]}\frac{1+z^4}{1+z^6}dz \overset{\mathbf{1.c}}{=} \lim_{R\to\infty}\int_{\lambda_R}\frac{1+z^4}{1+z^6}dz \overset{(*)}{=} -\frac{2i}{3}2\pi i = \frac{4\pi}{3}.$$

2.a. Le théorème de Rouché implique que $f'(z_0) \neq 0$ pour $z_0 \in U$. Le théorème d'inversion locale implique alors l'existence de voisinages ouverts $U_{z_0} \subset U$ et $V_{f(z_0)} \subset V$ tels que la restriction de f à U_{z_0} induise une bijection avec $V_{f(z_0)}$. Ceci montre que l'image $V = f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. De plus, la fonction réciproque $f^{-1} : V_{f(z_0)} \to U_{z_0}$ est holomorphe en $f(z_0)$ avec dérivée $(f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$. Par conséquent, $f^{-1} : V \to U$ est holomorphe.

2.b. En représentant $z \in \mathbb{C}^*$ en coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$, on a $\mathrm{Re}(re^{i\theta}) > 0$ si et seulement si $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$. Comme $z^2 = r^2e^{2i\theta}$, on en déduit que $z^2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Inversement, tout $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ s'écrit $w = re^{i\phi}$ avec $\phi \in]-\pi, \pi[$. Pour $z = \sqrt{r}e^{i\frac{\phi}{2}}$, on obtient $z^2 = w$. Il s'en suit que $z \mapsto z^2$ est une bijection holomorphe entre $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ et $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.

2.c. L'equation $w = \frac{1+iz}{1-iz}$ équivaut à l'équation $z = i\left(\frac{1-w}{1+w}\right)$ pourvu que $z \neq -i$ et $w \neq -1$. Par conséquent: $z \mapsto \frac{1+iz}{1-iz}$ est une bijection holomorphe entre $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ et $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$ d'inverse $w \mapsto i\left(\frac{1-w}{1+w}\right)$. L'image de $\mathbb{R}_-\backslash\{-1\}$ par la fraction rationnelle $\frac{1-w}{1+w}$ est précisément l'ensemble des réels de module ≥ 1 privé de $\{-1\}$. Il s'en suit qu'on obtient la bijection holomorphe requise par restriction.

2.d. Un ouvert U de $\mathbb{C}$ est *simplement connexe* s'il est connexe et si tout lacet à valeurs dans U est homotope dans U à un lacet constant. Il s'en suit que pour deux ouverts U et V de $\mathbb{C}$ qui sont homéomorphes, U est simplement connexe si et seulement si V est simplement connexe. Comme une fonction holomorphe est continue, une fonction biholomorphe est en particulier un homéomorphisme.

Le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ est *convexe*, i.e. il contient avec tout couple de points tout le segment qui les joint. Il s'en suit que le demi-plan est simplement connexe. Ceci implique par **2.b** que $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ est simplement connexe, ce qui à son tour implique par **2.c** que W est simplement connexe.

3.a. La fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ est holomorphe en dehors de $z = \pm i$, donc holomorphe sur W. Comme W est simplement connexe, le théorème de Cauchy montre que f possède une primitive F sur W qu'on choisit telle que $F(0) = 0$.

3.b. Comme $\tan(U) = W$, la fonction $z \mapsto F(\tan(z))$ est holomorphe sur U de dérivée

$$F'(\tan(z))\tan'(z) = \frac{1}{1+\tan^2(z)}(1+\tan^2(z)) = 1.$$

La fonction $z \mapsto z$ est également holomorphe sur U de dérivée 1. Comme U est connexe, on en déduit que $F(\tan(z)) = z+cte$ sur U. En posant $z = 0$, on obtient $cte = 0$, donc $F(\tan(z)) = z$ sur U. Noter que $\tan : U \to W$ est biholomorphe d'inverse $F : W \to U$, donc $F(w) = \arctan(w)$ avec sa détermination habituelle.

3.c. On a $F'(z) = f(z) = \frac{1}{1+z^2} = 1-z^2+z^4-z^6 \pm \cdots$. Comme $F(0) = 0$ on obtient par intégration terme par terme que $F(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} \pm \cdots$. Les rayons de convergence des développements de Taylor de $F(z)$ et de $F'(z) = f(z)$ coïncident. Le rayon de convergence R du développement de $f(z)$ est égale à la distance minimale des pôles de f à l'origine, i.e. $R = |\pm i| = 1$.

3.d. Comme $z, \frac{1}{z} \in W$ si $\mathrm{Re}(z) > 0$, la fonction $z \mapsto F(z) + F(\frac{1}{z})$ est holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > 0$ de dérivée $\frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{z})^2}\frac{-1}{z^2} = 0$. Comme le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > 0$ est connexe, la fonction $z \mapsto F(z) + F(\frac{1}{z})$ est constant sur ce demi-plan. Pour $z = 1$, on obtient $F(1) + F(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. De même, on obtient la constance sur le demi-plan $\mathrm{Re}(z) < 0$, avec constante $F(-1) + F(\frac{1}{-1}) = -\frac{\pi}{2}$.

3.e. Comme $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ est le domaine de définition de la détermination principale du logarithme, la fonction $G(z) = \frac{1}{2i}\ln_0\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$ est holomorphe sur W (en vertu de **2.c**). On obtient comme dérivée

$$G'(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{i}{1+iz} - \frac{-i}{1-iz}\right) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Donc F et G ont même dérivée sur l'ouvert connexe W; en plus, $F(0) = 0 = G(0)$. Par conséquent, F et G coïncident sur W.

3.f. En appliquant **1.a** à la fraction rationnelle $\frac{1}{1+z^2}$, on obtient $\mathrm{Res}(f, \pm i) = \frac{1}{\pm 2i} = \mp\frac{i}{2}$. On sait que $\mathrm{Res}(f, \pm i)$ se calcule par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\delta,\pm i}} f(z)dz$$

où $\gamma_{\delta,\pm i}(t) = \pm i + \delta e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$, avec $\delta > 0$ suffisamment petit. Si la primitive F de f sur W admettait un prolongement analytique à $\mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$, alors ces deux intégrales seraient nulles, contraires au calcul des résidus.