ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CLEMENS BERGER

Opérades cellulaires et espaces de lacets itérés.

Annales de l'institut Fourier, tome 46, nº 4 (1996), p. 1125-1157.
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_4_1125_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
46, 4 (1996), 1125-1157

OPÉRADES CELLULAIRES ET ESPACES DE LACETS ITÉRÉS

par Clemens BERGER

Introduction.

L'espace $F(\mathbf{R}^\infty, p)$ des configurations de p points distincts de $\mathbf{R}^\infty$ est contractile et peut ainsi servir de $\mathfrak{S}_p$-fibré universel, le groupe symétrique opérant librement par permutation des points. Les sous-espaces $\mathbf{R}^n$ de $\mathbf{R}^\infty$ définissent alors une filtration "géométrique" du fibré universel qui *diffère* sensiblement de la filtration induite par la construction de l'espace classifiant de $\mathfrak{S}_p$. Le résultat principal de cet article est une caractérisation homotopique de cette filtration, basée sur la structure de *préopérade cellulaire* de la suite des espaces de configurations $(F(\mathbf{R}^\infty, p))_{p\geqslant 1}$.

Dans la catégorie des ensembles simpliciaux, la filtration "géométrique" du $\mathfrak{S}_p$-fibré universel a été étudiée par J. Smith [18] et T. Kashiwabara [12]. Notre approche met en évidence la structure commune qui relie la filtration de $F(\mathbf{R}^\infty, p)$, les catégories de configurations de Kashiwabara et la combinatoire du groupe symétrique telle qu'elle se manifeste dans la filtration de Smith. Les permutoèdres de Milgram [15] s'intègrent également dans la théorie, ce qui souligne l'aspect unificateur de la structure de préopérade cellulaire et éclaircit l'origine de ces modèles combinatoires d'espaces de configurations.

L'action d'une *E_n-opérade* détecte selon P. May [13] les espaces de lacets n-fois itérés (après éventuelle complétion en groupe). Or, la filtration "géométrique" d'une *opérade cellulaire* est de fait une filtration de l'opérade par des E_n-sous-opérades. Le théorème de détection d'espaces

Mots-clés : Espaces de configurations – Espaces de lacets itérés – Opérades cellulaires – Groupes symétriques – Permutoèdres.
Classification math. : 55P35 – 20B30 – 06A07 – 52B12.

de lacets n-fois itérés s'applique donc à toute catégorie admettant une opérade cellulaire, en l'occurrence à la catégorie des CW-complexes via les permutoèdres de Milgram, à la catégorie des ensembles simpliciaux via les modèles de Smith, à la catégorie des ensembles partiellement ordonnés via les catégories de configurations de Kashiwabara et enfin à la catégorie des petites catégories via les *opérades n-monoïdales* récemment introduites par Balteanu, Fiedorowicz, Schwänzl et Vogt [1].

L'exposé sera subdivisé en trois parties :

- la première partie définit la filtration géométrique d'une préopérade cellulaire, établit son type d'homotopie et étudie la structure cellulaire sous-jacente aux filtrations de Smith et de Kashiwabara ;
- la seconde partie relie la filtration géométrique à la théorie des E_n-opérades de May afin d'en déduire un théorème de détection "universel" pour les espaces de lacets n-fois itérés ;
- la troisième partie traite les permutoèdres de Milgram.

Mes remerciements vont à Takuji Kashiwabara qui m'a encouragé à préciser des idées qui n'étaient que vagues au début. De même, je voudrais vivement remercier Zig Fiedorowicz pour sa lecture approfondie du manuscrit : ses remarques pertinentes m'ont permis d'améliorer nettement la présentation de la deuxième partie.

1. Préopérades.

Cohen, May et Taylor ont introduit le concept de *système de coefficients* par "oubli" de la structure multiplicative d'une opérade [8]. Nous reprenons leur concept avec une modification mineure sous le nom de *préopérade*.

DÉFINITION 1.1. — Soit Λ la catégorie dont les objets sont les ensembles finis non vides $\mathbf{p} = \{1, 2, \ldots, p\}$ et dont les morphismes sont les applications *injectives*.

Une *préopérade* à valeurs dans une catégorie $\mathcal{C}$ est alors un foncteur contravariant $\mathcal{O} : \Lambda \to \mathcal{C}$. L'*image* de la préopérade sera notée $(\mathcal{O}_p)_{p>0}$ quant aux objets, et $\phi^* : \mathcal{O}_q \to \mathcal{O}_p$ quant aux morphismes de Λ.

Si la préopérade est à valeurs dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés (resp. la catégorie des ensembles simpliciaux, resp. la catégorie des espaces topologiques), nous dirons qu'elle est *ordonnée* (resp. *simpliciale*, resp. *topologique*).

Un *morphisme de préopérades* $f : \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ est une transformation naturelle de foncteurs. Dans le cas de préopérades topologiques, nous dirons que f est une Λ-*équivalence* (faible) si, pour tout $p > 0$, l'application induite $f_p : \mathcal{O}_p \to \mathcal{O}'_p$ est une équivalence d'homotopie (faible). Deux préopérades sont dites (faiblement) Λ-*équivalentes* si elles sont jointes par une suite finie de Λ-équivalences (faibles) non nécessairement composables entre elles. À l'aide des foncteurs *nerf* $\mathcal{N}$ et *réalisation géométrique* $|-|$, les mêmes notions s'appliquent aux préopérades ordonnées et simpliciales.

NOTATION 1.2. — *Tout morphisme de la catégorie* Λ *s'écrit de manière unique comme composé d'une bijection suivie d'un morphisme croissant; pour tout* $\phi \in \Lambda(\mathbf{p},\mathbf{q})$ *nous noterons* $\phi = \phi^{cr} \circ \phi^{\natural}$ *avec* $\phi^{\natural} \in \Lambda(\mathbf{p},\mathbf{p})$ *et* $\phi^{cr} \in \Lambda^{cr}(\mathbf{p},\mathbf{q})$, *où*

$$\Lambda^{cr}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \{\phi \in \Lambda(\mathbf{p},\mathbf{q}) \mid \phi(i) < \phi(j) \text{ pour } i < j\}.$$

Pour p entiers distincts $i_1,\dots,i_p$ de $\mathbf{q}$, *nous noterons* $\phi_{i_1,\dots,i_p} : \mathbf{p} \to \mathbf{q}$ *le morphisme qui applique* $(1,\dots,p)$ *sur* $(i_1,\dots,i_p)$.

Exemples 1.3 (a) Les groupes symétriques et leur fibrés universels.

La famille des groupes symétriques $\mathfrak{S}_p = \Lambda(\mathbf{p},\mathbf{p})$ définit une préopérade (ensembliste) $\mathfrak{S}$ en posant pour $\phi \in \Lambda(\mathbf{p},\mathbf{q})$:

$$\begin{aligned}\phi^* : \mathfrak{S}_q &\to \mathfrak{S}_p\\ \sigma &\mapsto (\sigma \circ \phi)^{\natural}.\end{aligned}$$

La construction simpliciale du G-fibré universel WG d'un groupe discret G est fonctorielle en ce sens que toute application *ensembliste* $f : G \to G'$ induit un morphisme simplicial f-*équivariant* $Wf : WG \to WG'$. Le foncteur composé $\Gamma = W \circ \mathfrak{S}$ définit ainsi une préopérade simpliciale (en fait une E_∞-*opérade* simpliciale) dont la riche structure combinatoire a été étudiée par Barratt-Eccles [3] et Smith [18].

(b) Les espaces de configurations.

La famille des espaces de configurations $F_p = F(\mathbf{R}^\infty, p)$ définit une préopérade topologique F en posant pour $\phi \in \Lambda(\mathbf{p},\mathbf{q})$:

$$\begin{aligned}\phi^* : F_q &\to F_p\\ (x_1,\dots,x_q) &\mapsto (x_{\phi(1)},\dots,x_{\phi(p)}).\end{aligned}$$

Comme cette préopérade est Λ-équivalente à l'opérade des "petits cubes" de Boardman-Vogt [6], elle contient déjà la "géométrie" nécessaire à la détection des espaces de lacets infinis (voir [13], [8] et 2.7b).

Remarque 1.4. — Motivé par la similitude de ces deux exemples, Smith [18] a été amené à conjecturer qu'une certaine filtration $\Gamma^{(n)}$ de l'opérade simpliciale Γ correspondait à la filtration de F induite par l'inclusion des $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^\infty$. Cette conjecture a été démontrée par Kashiwabara [12]. Dans sa preuve, il utilise implicitement une préopérade *ordonnée* qui lui sert à comparer les décompositions cellulaires des deux préopérades F et Γ. Sa présentation repose néanmoins sur le calcul de F. Cohen de l'*anneau de cohomologie* des espaces de configurations [7]. Nous donnerons ici une définition entièrement *combinatoire* de cette préopérade ordonnée et en déduirons une preuve élémentaire de l'équivalence *filtrée* des préopérades topologiques $|\Gamma|$ et F.

Dans la suite, nous noterons $\mathbf{N}^{\binom{p}{2}}$ le produit de $\binom{p}{2}$ copies de l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels. Un élément $\mu \in \mathbf{N}^{\binom{p}{2}}$ portera un double indice $\mu = (\mu_{ij})_{1\leqslant i<j\leqslant p}$. Il s'interprète de manière naturelle comme un *étiquetage* des arêtes du *graphe complet* à p sommets. Tout morphisme $\phi \in \Lambda(\mathbf{p},\mathbf{q})$ induit un opérateur naturel $\phi^* : \mathbf{N}^{\binom{q}{2}} \to \mathbf{N}^{\binom{p}{2}}$ donné par

$$\phi^*(\mu)_{ij} = \begin{cases} \mu_{\phi(i),\phi(j)} & \text{si } \phi(i) < \phi(j); \\ \mu_{\phi(j),\phi(i)} & \text{si } \phi(j) < \phi(i). \end{cases}$$

DÉFINITION 1.5. — *La préopérade ordonnée du graphe complet $\mathcal{K}$ est définie en posant $\mathcal{K}_p = \mathbf{N}^{\binom{p}{2}} \times \mathfrak{S}_p$ et pour $\phi \in \Lambda(\mathbf{p},\mathbf{q})$:*

$$\begin{aligned} \phi^* : \mathcal{K}_q &\to \mathcal{K}_p \\ (\mu,\sigma) &\mapsto (\phi^*(\mu),\phi^*(\sigma)), \end{aligned}$$

où l'ordre partiel sur $\mathcal{K}_2 = \mathbf{N} \times \mathfrak{S}_2$ est donné par

$$(m,\sigma) \leqslant (n,\tau) \Leftrightarrow (m,\sigma) = (n,\tau) \text{ ou } m < n$$

et étendu à $\mathcal{K}_p = \mathbf{N}^{\binom{p}{2}} \times \mathfrak{S}_p$ par

$$(\mu,\sigma) \leqslant (\nu,\tau) \Leftrightarrow \forall i<j : \phi^*_{ij}(\mu,\sigma) \leqslant \phi^*_{ij}(\nu,\tau).$$

Nous utiliserons l'indexation suivante pour $\alpha = (\mu,\sigma) \in \mathcal{K}_p$:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= (\sigma^{-1})^*(\mu)_{ij}, \quad \text{i.e.} \\ \alpha &= \sigma^*((\alpha_{ij})_{1\leqslant i<j\leqslant p}, \mathrm{id}_{\mathbf{p}}). \end{aligned}$$

Exemple 1.6. — Décomposition cellulaire subordonnée à $\mathcal{K}_2$.

Le $\mathfrak{S}_2$-fibré universel peut être réalisé par la sphère-unité S^∞ de $\mathbf{R}^\infty$, l'élément non trivial de $\mathfrak{S}_2$ agissant par l'application antipodale. La CW-structure minimale de S^∞ compatible avec cette action est donnée par la famille des *hémisphères*. Or l'ensemble de ces cellules, ordonné par inclusion, est canoniquement isomorphe à $\mathcal{K}_2$. Les ensembles partiellement ordonnés $\mathcal{K}_p$ permettent de définir une décomposition analogue des $\mathfrak{S}_p$-fibrés universels.

DÉFINITION 1.7. — *Un espace topologique X admet une A-décomposition cellulaire $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ pour un ensemble partiellement ordonné A si, pour tout $\alpha \in A$, la "cellule" c_α est un sous-espace fermé et contractile de X tel que*

1. $c_\alpha \subseteq c_\beta \Leftrightarrow \alpha \leqslant \beta$ *;*
2. *les inclusions de cellules soient des cofibrations ;*
3. *la limite inductive $\varinjlim_A c_\alpha$ s'identifie à X, i.e. l'espace X porte la topologie faible par rapport aux cellules c_α.*

LEMME 1.8. — *Si un espace topologique X admet une A-décomposition cellulaire, alors X a le même type d'homotopie "cellulaire" que $|\mathcal{N}A|$.*

Preuve. — Le nerf $\mathcal{N}A$ de la catégorie A s'identifie à la colimite homotopique $\text{h-}\varinjlim_A *$ du foncteur constant défini sur A. Le diagramme suivant donne alors l'équivalence d'homotopie cherchée :

$$X = \varinjlim{}_A c_\alpha \xleftarrow{p_1} \text{h-}\varinjlim{}_A c_\alpha \xrightarrow{p_2} \text{h-}\varinjlim{}_A |*| = |\mathcal{N}A|.$$

Comme les inclusions de cellules sont des cofibrations, la projection p_1 est une équivalence d'homotopie et comme les cellules c_α sont contractiles, il en est de même de la projection p_2. Par définition même, les deux projections préservent la structure cellulaire ; comme la première est une fibration, elle admet en outre un inverse homotopique qui respecte la structure cellulaire. □

DÉFINITION 1.9. — *Une préopérade topologique $\mathcal{O}$ est dite* cellulaire *si l'espace $\mathcal{O}_2$ admet une $\mathcal{K}_2$-décomposition cellulaire $\mathfrak{S}_2$-équivariante $(\mathcal{O}_2^{(\alpha)})_{\alpha\in\mathcal{K}_2}$ telle que*

1. *pour $\alpha \in \mathcal{K}_p$, la "cellule"*

$$\mathcal{O}_p^{(\alpha)} = \bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant p} (\phi_{ij}^*)^{-1}(\mathcal{O}_2^{\phi_{ij}^*(\alpha)})$$

est contractile et pour $\alpha, \beta \in \mathcal{K}_p$ avec $\alpha \leqslant \beta$, l'inclusion canonique de $\mathcal{O}_p^{(\alpha)}$ dans $\mathcal{O}_p^{(\beta)}$ est une cofibration;

2. *chaque $\mathfrak{S}_p$-orbite de $\mathcal{O}_p$ possède un point ordonné.*

Un point $x \in \mathcal{O}_p$ est dit *ordonné* si, pour tout $i < j$, la cellule *minimale* $\mathcal{O}_2^{(\alpha)}$ contenant $\phi_{ij}^*(x)$ est indexée par $\alpha = (m, \mathrm{id}_2)$. La structure cellulaire induit une *filtration* de $\mathcal{O}$ par des préopérades $\mathcal{O}^{(n)}$ en posant

$$\mathcal{O}_p^{(n)} = \bigcup_{\substack{(\mu,\sigma)\in\mathcal{K}_p \\ |\mu|<n}} \mathcal{O}_p^{(\mu,\sigma)} \text{ où } |\mu| = \max_{1\leqslant i<j\leqslant p} \mu_{ij}.$$

Enfin, pour une cellule $\mathcal{O}_p^{(\alpha)}$, l'*intérieur cellulaire* $\breve{\mathcal{O}}_p^{(\alpha)}$ est défini par

$$\breve{\mathcal{O}}_p^{(\alpha)} = \mathcal{O}_p^{(\alpha)} \setminus \Big(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{O}_p^{(\beta)} \Big)$$

et nous noterons $\mathcal{K}(\mathcal{O})_p$ le sous-ensemble partiellement ordonné de $\mathcal{K}_p$ formé par les indices des cellules d'intérieur non vide :

$$\mathcal{K}(\mathcal{O})_p = \{\alpha \in \mathcal{K}_p \mid \breve{\mathcal{O}}_p^{(\alpha)} \neq \varnothing\}.$$

Remarque 1.10. — La cellule "ouverte" $\breve{\mathcal{O}}_p^{(\alpha)}$ s'écrit également comme intersection d'images réciproques de cellules "ouvertes" :

$$\breve{\mathcal{O}}_p^{(\alpha)} = \bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant p} (\phi_{ij}^*)^{-1}(\breve{\mathcal{O}}_2^{\phi_{ij}^*(\alpha)}).$$

Il s'ensuit que la famille des $\mathcal{K}(\mathcal{O})_p$ définit une préopérade ordonnée $\mathcal{K}(\mathcal{O})$ qui s'injecte dans $\mathcal{K}$ en respectant les filtrations.

THÉORÈME 1.11. — *Soit $\mathcal{O}$ une préopérade cellulaire.*

(a) *Pour tout p, les cellules d'intérieur non vide $(\mathcal{O}_p^{(\alpha)})_{\alpha\in\mathcal{K}(\mathcal{O})_p}$ forment une $\mathcal{K}(\mathcal{O})_p$-décomposition cellulaire de $\mathcal{O}_p$.*

(b) *L'inclusion de $\mathcal{K}(\mathcal{O})$ dans $\mathcal{K}$ est une Λ-équivalence filtrée. Deux préopérades cellulaires ont en particulier des filtrations Λ-équivalentes.*

Preuve. — Pour la première partie de l'énoncé, il s'agit de vérifier que l'ordre des cellules d'intérieur von vide de $\mathcal{O}_p$ reflète bien l'ordre des indices dans $\mathcal{K}(\mathcal{O})$ et qu'elles recouvrent l'espace entier. Plus précisément, nous allons établir :

$$\mathcal{O}_p^{(\alpha)} \subseteq \mathcal{O}_p^{(\beta)} \Rightarrow \alpha \leqslant \beta \text{ si } \alpha \in \mathcal{K}(\mathcal{O})_p \tag{1}$$

$$\mathcal{O}_p = \dot{\bigcup_{\alpha \in \mathcal{K}(\mathcal{O})_p}} \breve{\mathcal{O}}_p^{(\alpha)}. \tag{2}$$

Montrons la contraposée de (1) et supposons que α ne précède pas β dans $\mathcal{K}_p$. Il existe alors un morphisme $\phi \in \Lambda(\mathbf{2},\mathbf{p})$ tel que $\phi^*(\alpha)$ ne précède pas $\phi^*(\beta)$ dans $\mathcal{K}_2$. Il s'ensuit que les intersections $\breve{\mathcal{O}}_2^{\phi^*(\alpha)} \cap \mathcal{O}_2^{\phi^*(\beta)}$ et $\breve{\mathcal{O}}_p^{(\alpha)} \cap \mathcal{O}_p^{(\beta)}$ sont *vides*. En particulier, si la cellule $\mathcal{O}_p^{(\alpha)}$ est d'intérieur non vide, elle n'est pas incluse dans $\mathcal{O}_p^{(\beta)}$.

Pour montrer (2), désignons par (m_y, σ_y) l'indice de l'unique cellule $\mathcal{O}_2^{(m_y,\sigma_y)}$ dont l'intérieur contient le point $y \in \mathcal{O}_2$. Un point $x \in \mathcal{O}_p$ appartient alors à $\breve{\mathcal{O}}_p^{(\mu,\sigma)}$, avec $(\mu,\sigma) \in \mathcal{K}(\mathcal{O})_p$, si et seulement si $\phi^*(\mu,\sigma) = (\mu_{\phi^*(x)}, \sigma_{\phi^*(x)})$ pour tout $\phi \in \Lambda^{cr}(\mathbf{2},\mathbf{p})$. Cela détermine de manière unique μ et σ ; en effet, $\mu = (\mu_{\phi^*(x)})_{\phi \in \Lambda^{cr}(\mathbf{2},\mathbf{p})}$ et σ est l'unique permutation telle que $(\sigma^{-1})^*(x)$ soit un point ordonné de $\mathcal{O}_p$.

Pour montrer (b), nous utilisons le fait que toute cellule $\mathcal{O}_p^{(\alpha)}, \alpha \in \mathcal{K}_p$, s'identifie à la réunion des cellules d'intérieur non vide qu'elle contient. D'après le lemme 1.8, cela implique que le nerf de l'ensemble $\{\beta \in \mathcal{K}(\mathcal{O})_p \,|\, \beta \leqslant \alpha\}$ est contractile pour tout $\alpha \in \mathcal{K}_p$. Mais c'est exactement l'hypothèse du théorème A de Quillen [16] qui affirme que dans ce cas, l'inclusion de $\mathcal{K}(\mathcal{O})_p$ dans $\mathcal{K}_p$ induit une équivalence d'homotopie $|\mathcal{N}\mathcal{K}(\mathcal{O})_p| \xrightarrow{\sim} |\mathcal{N}\mathcal{K}_p|$. En particulier, toute préopérade cellulaire est Λ-équivalente à $|\mathcal{N}\mathcal{K}|$, les filtrations étant respectées, ce qui signifie bien que deux préopérades cellulaires ont des filtrations Λ-équivalentes. □

Remarque 1.12. — La preuve précédente montre que la contractibilité des cellules *d'intérieur vide* sert uniquement à démontrer l'équivalence entre les ensembles partiellement ordonnés $\mathcal{K}(\mathcal{O})_p$ et $\mathcal{K}_p$. Or, le théorème B de Quillen [16] indique que la contractibilité de ces cellules n'est pas la seule façon d'obtenir une telle équivalence. Il s'avère en effet que la préopérade F admet une structure cellulaire dont certaines cellules d'intérieur vide ont plusieurs composantes connexes. Toutefois, l'inclusion de $\mathcal{K}(F)$ dans $\mathcal{K}$ est bien une équivalence filtrée de préopérades ordonnées (1.17c) de sorte que le théorème de comparaison s'applique. Puisque la préopérade simpliciale Γ admet également une structure cellulaire, nous obtenons le corollaire suivant qui a été conjecturé par Smith [18] et démontré par Kashiwabara [12] :

COROLLAIRE 1.13. — *Le réalisé de l'ensemble simplicial $\Gamma_p^{(n)}$ (i.e. $C_n\mathfrak{S}_p$ dans la notation de Smith) a le même type d'homotopie $\mathfrak{S}_p$-équivariante que l'espace des configurations $F(\mathbf{R}^n, p)$ de p points distincts de $\mathbf{R}^n$.*

Preuve. — Puisque les préopérades $|\Gamma^{(n)}|$ et $F^{(n)}$ sont Λ-équivalentes, il suffit de remarquer que $F_p^{(n)}$ est $\mathfrak{S}_p$-homéomorphe à $F(\mathbf{R}^n, p) \times \mathbf{R}^\infty$. □

Exemple 1.14. — La structure cellulaire de la préopérade Γ.

Les cellules du $\mathfrak{S}_p$-fibré universel $|W\mathfrak{S}_p| = |\Gamma_p|$ (1.3a) seront réalisées par certains sous-ensembles simpliciaux $\Gamma_p^{(\alpha)}$ de Γ_p. Nous rappelons qu'un k-simplexe de Γ_p s'écrit comme un $(k+1)$-uplet d'éléments de $\mathfrak{S}_p$; nous noterons σ_x la *dernière* composante du simplexe $x \in \Gamma_p$. Le n-squelette de Γ_p sera noté $sk_n\Gamma_p$.

Les cellules de Γ sont alors définies en posant pour $(m, \sigma) \in \mathcal{K}_2$ et $(\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_p$:

$$\Gamma_2^{(m,\sigma)} = \{x \in sk_m\Gamma_2 \,|\, \sigma_x = \sigma \text{ si } x \notin sk_{m-1}\Gamma_2\}$$
$$\Gamma_p^{(\mu,\sigma)} = \{x \in \Gamma_p \,|\, \phi_{ij}^*(x) \in \Gamma_2^{(\phi_{ij}^*(\mu), \phi_{ij}^*(\sigma))} \text{ pour } 1 \leqslant i < j \leqslant p\}.$$

La condition (1.9.1) est satisfaite : en effet, pour $(\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_p$, l'opérateur

$$\begin{aligned} \gamma : \Gamma_p^{(\mu,\sigma)} &\to \Gamma_p^{(\mu,\sigma)} \\ (\sigma_0, \ldots, \sigma_k) &\mapsto (\sigma_0, \ldots, \sigma_k, \sigma) \end{aligned}$$

définit une *contraction simpliciale*; la stabilité de $\Gamma_p^{(\mu,\sigma)}$ par γ résulte de la stabilité de $\Gamma_2^{(m,\sigma)}$ et des relations de commutation $\phi^*\gamma = \gamma\phi^*$. Les cellules $|\Gamma_p^{(\mu,\sigma)}|$ sont donc contractiles et la réalisation géométrique transforme une inclusion de cellules en cofibration fermée. La condition (1.9.2) est également satisfaite étant donné qu'un point de $|\Gamma_p|$ est ordonné si et seulement s'il appartient à l'intérieur d'un simplexe de Γ_p dont la dernière composante est l'élément neutre de $\mathfrak{S}_p$.

PROPOSITION 1.15. — *L'ensemble des cellules d'intérieur non vide de* Γ_p *admet la description suivante :*

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\Gamma)_p = \{\alpha \in \mathcal{K}_p \mid & \textit{ il existe des entiers } \alpha_{ij}^{(r)}, 1 \leqslant i < j \leqslant p, \textit{ vérifiant} \\ & \alpha_{ij}^{(0)} = \alpha_{ij}\,,\ \alpha_{ij}^{(k+1)} = 0, \\ & \alpha_{ij}^{(r)} \equiv \alpha_{jk}^{(r)} \bmod 2 \textit{ implique } \alpha_{ij}^{(r)} \equiv \alpha_{jk}^{(r)} \equiv \alpha_{ik}^{(r)} \bmod 2 \quad (*) \\ & 0 \leqslant \alpha_{ij}^{(r)} - \alpha_{ij}^{(r+1)} \leqslant 1 \text{ pour } 0 \leqslant r \leqslant k\}.\end{aligned}$$

Preuve. — Une cellule de $|\Gamma_p^{(\mu,\sigma)}|$ est d'intérieur non vide si et seulement s'il existe un simplexe $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in \Gamma_p^{(\mu,\sigma)}$ tel que pour $\phi \in \Lambda^{cr}(\mathbf{2}, \mathbf{p})$, l'image $\phi^*(\sigma_0, \ldots, \sigma_k)$ n'appartienne pas au $(\phi^*(\mu) - 1)$-squelette de Γ_2, ce qui veut dire que la suite $(\phi^*(\sigma_0), \ldots, \phi^*(\sigma_k))$ contient exactement $\phi^*(\mu)$ changements et se termine en $\phi^*(\sigma)$ (la seconde condition étant équivalente à $\sigma_k = \sigma$).

À toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, nous associons le $\binom{p}{2}$-uplet "binaire" $(\sigma_{ij})_{1 \leqslant i < j \leqslant p}$ défini par

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma(i) < \sigma(j), \\ 1 & \text{si } \sigma(i) > \sigma(j). \end{cases}$$

Un $\binom{p}{2}$-uplet binaire $(\alpha_{ij})_{1 \leqslant i < j \leqslant p}$ provient d'une permutation si et seulement s'il vérifie la condition $(*)$ ci-dessus. En effet, celle-ci exprime précisément que la relation définie par $i \prec j$ (resp. $i \succ j$) si $\alpha_{ij} = 0$ (resp. 1) est *transitive* et qu'elle induit par conséquent un ordre total sur l'ensemble $\mathbf{p}$. L'unique permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ avec $\sigma(1) \prec \sigma(2) \prec \ldots \prec \sigma(p)$ vérifie bien $\sigma_{ij} = \alpha_{ij}$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant p$.

En désignant par $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k)_{rs}$ le *nombre de changements* dans la suite $(\phi_{rs}^*(\sigma_0), \ldots, \phi_{rs}^*(\sigma_k))$ nous obtenons la formule suivante :

$$(\sigma_0, \ldots, \sigma_k)_{rs} = (\sigma_0, \sigma_1)_{rs} + (\sigma_1, \sigma_2)_{rs} + \ldots + (\sigma_{k-1}, \sigma_k)_{rs} \equiv (\sigma_0, \sigma_k)_{rs} \bmod 2.$$

Or, en spécialisant $(r, s) = (\sigma_k^{-1}(i), \sigma_k^{-1}(j))$, nous déduisons de l'identité

$$(\sigma_0, \sigma_k)_{\sigma_k^{-1}(i), \sigma_k^{-1}(j)} = (\sigma_0 \sigma_k^{-1})_{ij}$$

que les entiers $(\sigma_0, \ldots, \sigma_k)_{\sigma_k^{-1}(i), \sigma_k^{-1}(j)}$ vérifient la condition $(*)$. Mais, si α indexe la cellule dont l'intérieur contient $(\sigma_0, \ldots, \sigma_k)$, alors ces entiers s'identifient à α_{ij}, ce qui établit $(*)$ pour les indices des cellules d'intérieur non vide. Plus généralement, les entiers $\alpha_{ij}^{(r)} = (\sigma_r, \dots, \sigma_k)_{\sigma_k^{-1}(i), \sigma_k^{-1}(j)}$ possèdent toutes les propriétés requises.

Inversement, soit α un élément de $\mathcal{K}_p$ admettant une "filtration" par des entiers $\alpha_{ij}^{(r)}$ comme ci-dessus. Il existe alors pour tout r une permutation (unique) $\sigma_r \in \mathfrak{S}_p$ telle que $(\sigma_r\sigma^{-1})_{ij} \equiv \alpha_{ij}^{(r)} \bmod 2$ pour $i < j$ et le k-simplexe $(\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma)$ appartient à l'intérieur de la cellule $|\Gamma_p^{(\alpha)}|$. □

Exemple 1.16. — La structure cellulaire de la préopérade F.

Les points de $\mathbf{R}^\infty$ seront représentés par des suites $(x^{(i)})_{i\geqslant 0}$ nulles à partir d'un certain rang. Pour $x, y \in \mathbf{R}^\infty$, on notera $x \underset{i}{<} y$ (resp. $x \underset{i}{\leqslant} y$) si

$$x^{(i)} < y^{(i)} \text{ (resp. } x^{(i)} \leqslant y^{(i)}) \text{ et } x^{(k)} = y^{(k)} \text{ pour } k > i.$$

Les cellules de F sont alors définies en posant pour $(m, \sigma) \in \mathcal{K}_2$ et $(\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_p$:

$$F_2^{(m,\sigma)} = \{(x_1, x_2) \in F_2 \,|\, x_1 \underset{m}{\leqslant} x_2 \text{ si } \sigma(1) < \sigma(2) \text{ et } x_2 \underset{m}{\leqslant} x_1 \text{ si } \sigma(2) < \sigma(1)\},$$

$$F_p^{(\mu,\sigma)} = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_p \,|\, x_i \underset{\mu_{ij}}{\leqslant} x_j \text{ si } \sigma(i) < \sigma(j) \text{ et}$$
$$x_j \underset{\mu_{ij}}{\leqslant} x_i \text{ si } \sigma(j) < \sigma(i) \text{ pour } 1 \leqslant i < j \leqslant p\}.$$

Les intérieurs des cellules s'obtiennent en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes. Soit $F_p^{(\mu,\sigma)}$ une cellule d'intérieur non vide et $x \in \breve{F}_p^{(\mu,\sigma)}$ un point intérieur. Les applications

$$\begin{aligned} \gamma_t : F_p^{(\mu,\sigma)} &\to F_p^{(\mu,\sigma)} \\ y &\mapsto (1-t)y + tx \end{aligned}$$

définissent alors une contraction de $F_p^{(\mu,\sigma)}$ sur x. Les cellules d'intérieur vide ne sont pas contractiles en général : pour $\mu_{12} = \mu_{13} = 0$ et $\mu_{23} = 1$, la cellule $F_3^{(\mu,id_3)}$ est réunion disjointe des deux cellules $F_3^{(0,id_3)}$ et $F_3^{(0,\tau)}$, où τ est la transposition $[132] \in \mathfrak{S}_3$. Toutefois, l'ensemble des cellules d'intérieur non vide induit une Λ-équivalence filtrée entre $\mathcal{K}(F)$ et $\mathcal{K}$ (1.17c). En outre, une inclusion de cellules est une cofibration, ce qui établit la condition (1.9.1). La condition (1.9.2) est également satisfaite, étant donné qu'un point $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_p$ est ordonné si et seulement si les composantes vérifient $x_1 \underset{m_1}{<} x_2 \underset{m_2}{<} \cdots \underset{m_{p-1}}{<} x_p$ pour des entiers naturels m_i et 1.17b montre que tout point de F_p est de cette forme.

PROPOSITION 1.17. — *Soit F la préopérade des espaces de configurations réels.*

(a) *L'ensemble des cellules d'intérieur non vide de F_p est donné par*

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(F)_p &= \{\alpha \in \mathcal{K}_p \mid \alpha_{ik} = \max(\alpha_{ij}, \alpha_{jk}) \text{ pour } i < j < k\}\\ &= \{\alpha \in \mathcal{K}_p \mid \alpha_{ij} = \max_{i \leqslant k < j} \alpha_{kk+1}\}.\end{aligned}$$

(b) *L'intérieur cellulaire $\breve{F}_p^{(\alpha)}$ pour $\alpha = (\mu, \sigma) \in \mathcal{K}(F)_p$ est donné par*

$$\breve{F}_p^{(\alpha)} = \{(x_1, \ldots, x_p) \in F_p \mid x_{\sigma^{-1}(1)} \underset{\alpha_{12}}{<} x_{\sigma^{-1}(2)} \underset{\alpha_{23}}{<} \cdots \underset{\alpha_{p-1,p}}{<} x_{\sigma^{-1}(p)}\}.$$

(c) *L'inclusion de $\mathcal{K}(F)$ dans F est une Λ-équivalence filtrée de préopérades ordonnées. Toute préopérade intermédiaire $\mathcal{K}'$ décompose l'inclusion en deux Λ-équivalences filtrées $\mathcal{K}(F) \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathcal{K}' \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathcal{K}$.*

Preuve. — Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_p$. Si $\phi^*_{ij}(\sigma) = \phi^*_{jk}(\sigma)$, alors les deux permutations sont égales à $\phi^*_{ik}(\sigma)$ quel que soit le triplet d'indices i, j, k. L'existence d'un point intérieur $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \breve{F}_p^{(\mu,\sigma)}$ implique que pour tout i, j, k vérifiant $\phi^*_{ij}(\sigma) = \phi^*_{jk}(\sigma)$, on a soit $x_i \underset{\mu_{ij}}{<} x_j \underset{\mu_{jk}}{<} x_k$ et $x_i \underset{\mu_{ik}}{<} x_k$, soit les inégalités opposées. Dans les deux cas, il s'ensuit que $\mu_{ik} = \max(\mu_{ij}, \mu_{jk})$. Réciproquement, si pour tout triplet d'indices $i < j < k$ tel que $\phi^*_{ij}(\sigma) = \phi^*_{jk}(\sigma)$, on a la relation $\mu_{ik} = \max(\mu_{ij}, \mu_{jk})$, alors les points $x \in F_p^{(\mu,\sigma)}$ vérifient $x_{\sigma^{-1}(i)} \underset{\alpha_{ij}}{\leqslant} x_{\sigma^{-1}(j)}$ ce qui montre (a) et (b).

Pour (c), il suffit d'établir que l'inclusion des quotients $\mathcal{K}(F)_p/\mathfrak{S}_p \to \mathcal{K}_p/\mathfrak{S}_p$ admet un adjoint à droite respectant les filtrations. En effet, comme l'action du groupe symétrique est libre, le nerf du passage au quotient est une fibration de Kan et le lemme des cinq s'applique. En plus, l'adjoint à droite se restreint au sous-quotient $\mathcal{K}'_p/\mathfrak{S}_p$ ce qui implique la seconde assertion. Or, les objets de la catégorie quotient $\mathcal{K}_p/\mathfrak{S}_p$ sont en bijection canonique avec les "étiquetages" $(\alpha_{ij})_{1 \leqslant i < j \leqslant p}$ du graphe complet à p sommets et les morphismes $\alpha \xrightarrow{\rho} \beta$ de $\mathcal{K}_p/\mathfrak{S}_p$ correspondent aux permutations $\rho \in \mathfrak{S}_p$ telles que $(\alpha, \mathrm{id}_\mathbf{p}) \leqslant \rho^*(\beta, \mathrm{id}_\mathbf{p})$ dans $\mathcal{K}_p$.

L'adjoint à droite $\mathcal{K}_p/\mathfrak{S}_p \to \mathcal{K}(F)_p/\mathfrak{S}_p : \alpha \mapsto \hat{\alpha}$ est alors défini par les composantes de la co-unité de l'adjonction, explicitement :

$$\hat{\alpha} \xrightarrow{id} \alpha, \text{ où } \hat{\alpha}_{ij} = \max_{i \leqslant k < j} \min_{\substack{r \leqslant k \\ s > k}} \alpha_{rs}.$$

Il résulte de (a) que $\hat{\alpha}$ appartient à $\mathcal{K}(F)_p/\mathfrak{S}_p$ et que pour tout morphisme $\beta \xrightarrow{\rho} \alpha$ de source $\beta \in \mathcal{K}(F)_p/\mathfrak{S}_p$ nous obtenons $(\beta, \mathrm{id}_\mathbf{p}) \leqslant \rho^*(\hat{\alpha}, \mathrm{id}_\mathbf{p}) \leqslant \rho^*(\alpha, \mathrm{id}_\mathbf{p})$ ce qui établit la propriété universelle requise. □

Au coeur du théorème d'approximation de May (2.9a) se trouve un raffinement de la filtration naturelle d'une préopérade cellulaire $\mathcal{O}$ qui fait intervenir certains sous-espaces $\mathcal{O}_{r,s}^{(n)}$ de $\mathcal{O}_{r+s}^{(n+1)}$ formés par des points "provenant" de $\mathcal{O}_r^{(n)} \times \mathcal{O}_s^{(n+1)}$. Nous en présentons une version qui utilise la préopérade ordonnée $\mathcal{K}$. Le lecteur pourra également consulter [18] pour un traitement basé sur l'opérade Γ.

Définition 1.18. — *Soit $\mathcal{O}$ une préopérade cellulaire. Nous posons*

$$\begin{aligned}\varphi_{r,s} : \mathcal{O}_{r+s} &\to \mathcal{O}_r \times \mathcal{O}_s \\ z &\mapsto (\phi^*_{1,\dots,r}(z), \phi^*_{r+1,\dots,r+s}(z))\end{aligned}$$

et nous notons $\varphi_{r,s}^{(n)}$ la restriction de $\varphi_{r,s}$ à l'espace $\mathcal{O}_{r,s}^{(n)}$ défini par

$$\mathcal{O}_{r,s}^{(n)} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{K}_{r,s}^{(n)}} \mathcal{O}_{r+s}^{(\alpha)}, \text{ où}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{r,s}^{(n)} = \{(\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_{r+s}^{(n+1)} \mid \phi^*_{ij}(\mu, \sigma) &\in \mathcal{K}_2^{(n+1,[12])} \text{ si } i \leqslant r, \\ \phi^*_{ij}(\mu, \sigma) &\in \mathcal{K}_2^{(n+1,[21])} \text{ si } j \leqslant r\}.\end{aligned}$$

Il résulte des définitions que $\varphi_{r,s}^{(n)}$ est une application $\mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s$-équivariante à valeurs dans $\mathcal{O}_r^{(n)} \times \mathcal{O}_s^{(n+1)}$ et qu'on a des inclusions naturelles

$$\mathcal{O}_p^{(n)} = \mathcal{O}_{p,0}^{(n)} \subset \mathcal{O}_{p-1,1}^{(n)} \subset \dots \subset \mathcal{O}_{1,p-1}^{(n)} \subset \mathcal{O}_{0,p}^{(n)} = \mathcal{O}_p^{(n+1)}.$$

Proposition 1.19. — *Soit $\mathcal{O}$ une préopérade cellulaire. L'application $\varphi_{r,s}^{(n)}$ admet un inverse homotopique $\mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s$-équivariant*

$$\psi_{r,s}^{(n)} : \mathcal{O}_r^{(n)} \times \mathcal{O}_s^{(n+1)} \to \mathcal{O}_{r,s}^{(n)}.$$

Preuve. — D'après le lemme 1.8 et le théorème 1.11, il existe une équivalence d'homotopie

$$\mathcal{O}_{r+s} \xrightarrow{\simeq} |\mathcal{N}\mathcal{K}(\mathcal{O})_{r+s}| \xrightarrow{\simeq} |\mathcal{N}\mathcal{K}_{r+s}|$$

qui respecte les structures cellulaires et qui commute avec les opérateurs de la catégorie Λ. Il suffit par conséquent de montrer la proposition pour la préopérade ordonnée $\mathcal{K}$. Or, le morphisme $\varphi_{r,s}^{(n)} : \mathcal{K}_{r,s}^{(n)} \to \mathcal{K}_r^{(n)} \times \mathcal{K}_s^{(n+1)}$ admet la section $\mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s$-équivariante

$$\begin{aligned}\psi_{r,s}^{(n)} : \mathcal{K}_r^{(n)} \times \mathcal{K}_s^{(n+1)} &\to \mathcal{K}_{r,s}^{(n)} \\ ((\mu, \sigma), (\nu, \tau)) &\mapsto (\xi, \sigma \oplus \tau),\end{aligned}$$

où

$$\xi_{ij} = \begin{cases} \mu_{ij} & \text{si } i < j \leqslant r, \\ n & \text{si } i \leqslant r < j, \\ \nu_{ij} & \text{si } r < i < j. \end{cases}$$

Pour tout élément $\alpha \in \mathcal{K}_{r,s}^{(n)}$ nous obtenons l'inégalité $\alpha \leqslant \psi_{r,s}^{(n)}\phi_{r,s}^{(n)}(\alpha)$ qui prouve que l'identité de l'ensemble ordonné $\mathcal{K}_{r,s}^{(n)}$ (considéré comme catégorie) est adjointe au morphisme composé $\psi_{r,s}^{(n)}\phi_{r,s}^{(n)}$. En particulier, le nerf de $\mathcal{K}_{r,s}^{(n)}$ se rétracte par déformation simpliciale (via $\phi_{r,s}^{(n)}$) sur $\mathcal{K}_r^{(n)} \times \mathcal{K}_s^{(n+1)}$ et $\psi_{r,s}^{(n)}$ est l'inverse homotopique cherché. □

Remarque 1.20. — Dans le cas de l'opérade simpliciale Γ, un inverse homotopique de $\varphi_{r,s}^{(n)} : \Gamma_{r,s}^{(n)} \to \Gamma_r^{(n)} \times \Gamma_s^{(n+1)}$ s'obtient par restriction de l'inclusion canonique de $\Gamma_r \times \Gamma_s$ dans Γ_{r+s} (cf. 1.3a, [18]).

2. Opérades et espaces de lacets itérés.

Dans cette partie, nous étendons la structure cellulaire aux opérades pour relier les filtrations de Smith et de Kashiwabara à la théorie des E_n-opérades de May. À cet effet, nous présentons la définition d'une opérade sous une forme qui fait intervenir les propriétés particulières de la catégorie Λ (cf. [13]).

DÉFINITION 2.1. — *À toute catégorie $\mathcal{C}$ nous associons une catégorie $L\mathcal{C}$ dont les objets et les morphismes sont définis par*

$$Ob\, L\mathcal{C} = \coprod_{p>0} Ob\, \mathcal{C}^p$$

$$Mor_{L\mathcal{C}}((C_1, \ldots, C_p), (D_1, \ldots, D_q))$$
$$= \{(\phi; f_1, \ldots, f_p) \mid \phi \in \Lambda(\mathbf{p}, \mathbf{q}), f_i \in Mor_{\mathcal{C}}(C_i, D_{\phi(i)}) \text{ pour } i = 1, \ldots, p\}$$

où la composition est donnée par

$$(\psi; g_1, \ldots, g_q)(\phi, f_1, \ldots, f_p) = (\psi\phi; g_{\phi(1)}f_1, \ldots, g_{\phi(p)}f_p).$$

La construction est fonctorielle en $\mathcal{C}$ et la catégorie $L\mathcal{C}$ possède des coproduits finis définis par concaténation. Si $\mathcal{C}$ possède déjà des coproduits finis (notés $+$), alors nous disposons de deux foncteurs naturels en $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{llll} e_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to L\mathcal{C} & & m_{\mathcal{C}} : L\mathcal{C} & \to \mathcal{C} \\ C \mapsto (C) & & (C_1, \ldots, C_p) & \mapsto C_1 + \ldots + C_p \\ f \mapsto (\mathrm{id}_1; f) & & (\phi; f_1, \ldots, f_p) & \mapsto \phi(f_1, \ldots, f_p), \end{array}$$

où le morphisme $\phi(f_1,\dots,f_p) : C_1+\dots+C_p \to D_1+\dots+D_q$ est défini par ses restrictions $\phi(f_1,\dots,f_p)|_{C_i} = f_i$. Les foncteurs $e_\mathcal{C}$ et $m_\mathcal{C}$ vérifient les relations d'associativité $m_\mathcal{C} \circ m_{L\mathcal{C}} = m_\mathcal{C} \circ Lm_\mathcal{C}$ et d'unitarité $m_\mathcal{C} \circ e_\mathcal{C} = \mathrm{id}_\mathcal{C}$.

Soit $\mathbf{1}$ la catégorie ayant un seul objet et un seul morphisme; la catégorie Λ s'identifie alors à $L\mathbf{1}$ et nous noterons par analogie $\Lambda^{\otimes n}$ la catégorie $L^n\mathbf{1}$.

Définition 2.2. — Soit $\mathcal{O} : \Lambda \to \mathcal{C}$ une préopérade à valeurs dans une catégorie $(\mathcal{C}, \times, 1)$ avec produits finis (notés $\times$) et objet terminal (noté 1). Nous en déduisons par récurrence sur n les foncteurs contravariants

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}^{\otimes n} : \Lambda^{\otimes n} \to \mathcal{C} \\ &(C_1,\dots,C_p) \mapsto \mathcal{O}^{\otimes(n-1)}(C_1) \times \dots \times \mathcal{O}^{\otimes(n-1)}(C_p) \\ &(\phi; f_1,\dots,f_p) \mapsto \mathcal{O}(\phi) \times \mathcal{O}^{\otimes(n-1)}(f_1) \times \dots \times \mathcal{O}^{\otimes(n-1)}(f_p). \end{aligned}$$

Une *opérade* $(\mathcal{O}, \mu, \eta)$ est alors la donnée d'une préopérade $\mathcal{O}$ munie d'une unité $\eta : \mathbf{1} \dot{\to} \mathcal{O}e_\mathbf{1}$ et d'une multiplication $\mu : \mathcal{O}^{\otimes 2} \dot{\to} \mathcal{O}m_\Lambda$ associative et unitaire, c'est-à-dire $\mu \cdot L\mu = \mu \cdot \mu L$ et $\mu \cdot L\eta = \mu \cdot \eta L = \mathrm{id}_\mathcal{O}$.

Remarque 2.3. — De manière plus explicite, une opérade est une préopérade $\mathcal{O}$ munie d'une *unité* $1 \in \mathcal{O}_1$ et d'une *multiplication*

$$\begin{aligned} \mu^{\mathcal{O}}_{i_1\dots i_p} : \mathcal{O}_p \times \mathcal{O}_{i_1} \times \dots \times \mathcal{O}_{i_p} &\to \mathcal{O}_{i_1+\dots+i_p} \\ (z, z_1, \dots, z_p) &\mapsto z(z_1,\dots,z_p) \end{aligned}$$

telles que

(a) pour $(\phi; \phi_1,\dots,\phi_p) \in \Lambda^{\otimes 2}((i_1,\dots,i_p),(j_1,\dots,j_q))$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_p \times \mathcal{O}_{i_1} \times \dots \times \mathcal{O}_{i_p} & \xrightarrow{\mu_{i_1\dots i_p}} & \mathcal{O}_{i_1+\dots+i_p} \\ {\scriptstyle \phi^* \times \phi_1^* \times \dots \times \phi_p^*} \big\uparrow & & \big\uparrow {\scriptstyle \phi(\phi_1,\dots,\phi_p)^*} \\ \mathcal{O}_q \times \mathcal{O}_{j_1} \times \dots \times \mathcal{O}_{j_q} & \xrightarrow{\mu_{j_1\dots j_q}} & \mathcal{O}_{j_1+\dots+j_q} \end{array}$$

(b) pour $(z, z_i, z_{ij}) \in \mathcal{O}_p \times \prod_{i=1}^{p} \mathcal{O}_{s_i} \times \prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{s_i} \mathcal{O}_{s_{ij}}$:

$$\begin{aligned} &z(z_1(z_{11},\dots,z_{1s_1}),\dots,z_p(z_{p1},\dots,z_{ps_p})) \\ &\qquad = (z(z_1,\dots,z_p))(z_{11},\dots,z_{1s_1},\dots,z_{p1},\dots,z_{ps_p}) \end{aligned}$$

(c) pour $z \in \mathcal{O}_p : 1(z) = z = z(\overbrace{1, \ldots, 1}^{p})$.

Dans la définition originelle de May [13] une opérade est un foncteur contravariant $\mathcal{O} : \Lambda_0^\natural \to \mathcal{C}$ vérifiant (a), (b), (c) ci-dessus, où $\Lambda_0^\natural$ désigne la catégorie des *bijections* de Λ augmentée par l'identité de l'ensemble vide, et $\mathcal{O}_0 = \{1\}$. L'équivalence entre les deux définitions résulte de la factorisation unique des morphismes de Λ et de l'identité :

$$\phi^* = \mu^{\mathcal{O}}_{\epsilon_1 \ldots \epsilon_q}(-; 1, \ldots, 1) : \mathcal{O}_q \times \mathcal{O}_{\epsilon_1} \times \ldots \times \mathcal{O}_{\epsilon_q} \to \mathcal{O}_{\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_q} = \mathcal{O}_p,$$

où $\epsilon : \mathbf{q} \to \{0, 1\}$ désigne la fonction indicatrice de l'image de $\phi \in \Lambda^{cr}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

DÉFINITION 2.4. — *Un objet* pointé $(X, *)$ *de la catégorie* $\mathcal{C}$ *définit un foncteur* covariant

$$\begin{aligned} X^- : \Lambda &\to \mathcal{C} \\ \mathbf{p} &\mapsto X^p \\ \phi : \mathbf{p} \to \mathbf{q} &\mapsto \phi_* : \quad X^p \to X^q \\ & \qquad (x_1, \ldots, x_p) \mapsto (x_{\phi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\phi^{-1}(q)}), \end{aligned}$$

où $x_\varnothing$ *désigne le point base de* X.

Une *préopérade* $\mathcal{O}$ à valeurs dans une catégorie *cocomplète* $(\mathcal{C}, \times, 1)$ définit alors un endofoncteur $\mathcal{O}(-)$ de la catégorie des objets pointés de $\mathcal{C}$ en posant

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(X) &= \mathcal{O} \otimes_\Lambda X^- \\ &= \Big(\coprod_{p > 0} \mathcal{O}_p \times X^p \Big) \Big/ \Big((\phi^*(z), x) \sim (z, \phi_*(x)) \Big)_{x \in X^p, z \in \mathcal{O}_q, \phi \in \Lambda(\mathbf{p}, \mathbf{q})}, \end{aligned}$$

le point base de $\mathcal{O}(X)$ étant la classe d'équivalence du point $(1, *) \in \mathcal{O}_1 \times X$. La définition des foncteurs $\mathcal{O}^{\otimes n}$ est faite de sorte que les *images itérées* $\mathcal{O}^n(X)$ s'identifient aux produits tensoriels $\mathcal{O}^{\otimes n} \otimes_{\Lambda^{\otimes n}} X^- m_\Lambda \cdots m_{\Lambda^{\otimes n-1}}$.

Il s'ensuit que, pour une *opérade* $(\mathcal{O}, \mu, \eta)$, l'endofoncteur $\mathcal{O}(-)$ est muni de transformations naturelles $\mu_{\mathcal{O}X} = \mu \otimes_{m_\Lambda} X^- : \mathcal{O}^2(X) \to \mathcal{O}(X)$ et $\eta_X = \eta \otimes_{e_1} X^- : X \to \mathcal{O}(X)$. Les relations (a), (b) et (c) ci-dessus sont équivalentes aux relations $\mu_{\mathcal{O}} \cdot \mathcal{O}\mu_{\mathcal{O}} = \mu_{\mathcal{O}} \cdot \mu_{\mathcal{O}}\mathcal{O}$ et $\mu_{\mathcal{O}} \cdot \mathcal{O}\eta = \mu_{\mathcal{O}} \cdot \eta\mathcal{O} = id_{\mathcal{O}(-)}$, ce qui en théorie des catégories constitue la définition d'une *monade* $(\mathcal{O}(-), \mu_{\mathcal{O}}, \eta)$, voir [13].

Un objet pointé $(X, *)$ est un *$\mathcal{O}$-objet* s'il est muni d'un morphisme $\mu_X : \mathcal{O}(X) \to X$ tel que $\mu_X \cdot \eta_X = \mathrm{id}_X$ et $\mu_X \cdot \mathcal{O}\mu_X = \mu_X \cdot \mu_{\mathcal{O}X}$. Nous dirons également que l'opérade $\mathcal{O}$ *agit* sur $(X,*)$ via μ_X. En vertu de la définition du produit tensoriel $\otimes_\Lambda$, la donnée d'une $\mathcal{O}$-action $\mu_X : \mathcal{O}(X) \to X$ est équivalente à la donnée d'une famille de morphismes $(\mu_X)_p : \mathcal{O}_p \times X^p \to X$, $p > 0$, sujette à des relations du type (a), (b) et (c) ci-dessus.

Un *$\mathcal{O}$-morphisme* entre $\mathcal{O}$-objets est un morphisme pointé $f : (X,*) \to (Y,*)$ tel que $f \circ \mu_X = \mu_Y \circ \mathcal{O}(f)$. Nous appellerons *$\mathcal{O}$-équivalence* (faible) tout $\mathcal{O}$-morphisme qui est une équivalence d'homotopie (faible) dans $\mathcal{C}$. Deux $\mathcal{O}$-objets sont (faiblement) $\mathcal{O}$-équivalents s'ils sont joints par une suite finie de $\mathcal{O}$-équivalences (faibles) non nécessairement composables entre elles.

Exemples 2.5. — (a) *L'opérade des permutations $\mathfrak{S}$.*

La préopérade $\mathfrak{S}$ (1.3a) est une opérade pour l'unité $1 \in \mathfrak{S}_1$ et la multiplication

$$\begin{aligned}\mu^{\mathfrak{S}}_{i_1\ldots i_p} : \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{i_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{i_p} &\to \mathfrak{S}_{i_1+\ldots+i_p}\\ (\sigma;\sigma_1,\ldots,\sigma_p) &\mapsto \sigma(i_1,\ldots,i_p)\circ(\sigma_1\oplus\ldots\oplus\sigma_p),\end{aligned}$$

où $\sigma_1 \oplus \ldots \oplus \sigma_p$ désigne la permutation dont la restriction à l'image de l'inclusion canonique $\psi_r : \mathbf{i_r} \hookrightarrow \mathbf{i_1} + \ldots + \mathbf{i_p}$ s'identifie à σ_r et $\sigma(i_1,\ldots,i_p)$ désigne la permutation qui permute les p images $\psi_r(\mathbf{i_r})$ selon σ.

L'endofoncteur $\mathfrak{S}(-)$ associe à un objet pointé $(X,*)$ le *monoïde libre* de base $X - \{*\}$ et d'unité $*$. Les $\mathfrak{S}$-objets sont par conséquent les monoïdes de la catégorie considérée, le produit étant induit par $\mathrm{id}_{\mathbf{2}} \in \mathfrak{S}_2$; l'associativité du produit est équivalente à l'identité $\mu^{\mathfrak{S}}_{12}(\mathrm{id}_{\mathbf{2}};1,\mathrm{id}_{\mathbf{2}}) = \mu^{\mathfrak{S}}_{21}(\mathrm{id}_{\mathbf{2}};\mathrm{id}_{\mathbf{2}},1)$.

(b) *L'opérade du graphe complet $\mathcal{K}$.*

La préopérade $\mathcal{K}$ (1.5) est une opérade pour l'unité $1 \in \mathcal{K}_1$ et la multiplication

$$\begin{aligned}&\mu^{\mathcal{K}}_{i_1\ldots i_p} : \mathcal{K}_p \times \mathcal{K}_{i_1} \times \ldots \times \mathcal{K}_{i_p} \to \mathcal{K}_{i_1+\ldots+i_p}\\ &((\mu,\sigma);(\mu_1,\sigma_1),\ldots,(\mu_p,\sigma_p)) \mapsto (\mu(\mu_1,\ldots,\mu_p),\sigma(\sigma_1,\ldots,\sigma_p)),\end{aligned}$$

où $\sigma(\sigma_1,\ldots,\sigma_p)$ est défini dans (a) et $\mu(\mu_1,\ldots,\mu_p) \in \mathbf{N}^{\binom{i_1+\ldots+i_p}{2}}$ est donné par

$$\mu(\mu_1,\ldots,\mu_p)_{jk} = \begin{cases}(\mu_r)_{\psi_r^{-1}(j),\psi_r^{-1}(k)} & \text{si } j,k \in \psi_r(\mathbf{i_r}),\\ \mu_{rs} & \text{si } j \in \psi_r(\mathbf{i_r}) \text{ et } k \in \psi_s(\mathbf{i_s}), r < s.\end{cases}$$

En d'autres termes, la multiplication $\mu^{\mathcal{K}}_{i_1\ldots i_p}$ *substitue* aux p sommets du graphe complet associé à $\mathcal{K}_p$ les graphes complets associés à $\mathcal{K}_{i_1},\ldots,\mathcal{K}_{i_p}$.

Nous verrons ci-dessous que cela constitue la description *combinatoire* de la multiplication de l'opérade des petits cubes de Boardman-Vogt. En outre, la filtration naturelle de $\mathcal{K}$ est stable par $\mu^{\mathcal{K}}_{i_1\dots i_p}$ et définit donc des *sous-opérades* $\mathcal{K}^{(n)} = \{\alpha \in \mathcal{K} \mid \alpha_{ij} < n\}$ qui nous serviront de modèles universels pour les E_n-opérades de May.

Observons enfin que $\mathcal{K}_2$ contient pour tout $n \geqslant 0$ un élément $\square_n = (n, \mathrm{id}_\mathbf{2})$ vérifiant $\mu^{\mathcal{K}}_{12}(\square_n; 1, \square_n) = \mu^{\mathcal{K}}_{21}(\square_n; \square_n, 1)$. Tout $\mathcal{K}^{(n)}$-objet admet par conséquent n structures monoïdales distinctes partageant la même unité. La section $\psi^{(n)}_{r,s}$ de la proposition 1.19 est d'ailleurs induite par $\square_n \in \mathcal{K}^{(n+1)}_2$.

(c) *L'opérade monoïdale* $\mathcal{M}$.

Soit $\mathcal{M}$ l'opérade ordonnée des éléments *décomposables* de $\mathcal{K}$, où un élément $\alpha \in \mathcal{K}$ est dit décomposable si soit $\alpha = 1$ soit

$$\alpha = \mu^{\mathcal{K}}_{i_1,i_2}(\alpha_0; \alpha_1, \alpha_2) \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \text{ décomposables.}$$

Les éléments de $\mathcal{M}^{(n)}_p = \mathcal{M} \cap \mathcal{K}^{(n)}_p$ sont donc les images de $(1, \dots, 1) \in (\mathcal{K}_1)^p$ par toute forme d'application itérée des n produits $\square_i$ de $\mathcal{K}^{(n)}_2$ suivie de l'action d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$. Il existe par conséquent une bijection canonique entre $\mathcal{M}^{(n)}_p$ et l'ensemble des expressions algébriques en p générateurs et n lois de composition associatives qui font intervenir chaque générateur exactement une fois.

Le *théorème de cohérence* de Balteanu, Fiedorowicz, Schwänzl et Vogt [1] peut alors s'énoncer comme suit : L'ensemble partiellement ordonné $\mathcal{M}^{(n)}_p$ est *isomorphe* à la partie p-homogène d'une *catégorie n-monoïdale libre à p générateurs.* Les morphismes d'une catégorie n-monoïdale sont engendrés par une famille d'*unités* et une famille de morphismes d'*échange*

$$\eta_A : 1 \to A,$$
$$\eta^{ij}_{ABCD} : (A\square_j B)\square_i(C\square_j D) \to (A\square_i C)\square_j(B\square_i D), \quad 0 \leqslant i < j < n,$$

sujettes aux contraintes d'associativité et d'unitarité naturelles, cf. [1]. La partie délicate du théorème est la preuve que les morphismes entre objets de $\mathcal{M}^{(n)}_p$ sont précisément ceux donnés par l'ordre partiel sur $\mathcal{M}^{(n)}_p$. Nous en déduisons que les $\mathcal{M}^{(n)}$-catégories sont les catégories n-monoïdales de [1].

L'inclusion de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{K}$ est une Λ-équivalence filtrée en vertu de 1.17c, car $\mathcal{M}$ contient $\mathcal{K}(F)$. Plus précisément, les éléments $\alpha \in \mathcal{K}(F)^{(n+1)}$ se décomposent sous la forme $\alpha = \sigma^*(\alpha_1\square_n\alpha_2\square_n \cdots \square_n\alpha_r)$ avec $\alpha_i \in \mathcal{K}(F)^{(n)}$.

(d) *L'opérade topologique Q et espaces de lacets infinis.*

L'opérade Q est définie par

$$Q_p = \varinjlim_n \; \Omega^n \left(\bigvee_{i=1}^{p} S^n \right),$$

le système inductif étant induit par la suspension. La structure de préopérade de Q provient de la préopérade $\mathbf{p} \mapsto \bigvee^{p} S^n$. L'unité $1 \in Q_1$ est représentée par $\mathrm{id}_{S^n}, n \geqslant 0$, et la multiplication est définie par *composition* :

$$\begin{aligned} \mu^Q_{i_1 \dots i_p} : Q_p \times Q_{i_1} \times \dots \times Q_{i_p} &\to Q_{i_1 + \dots + i_p} \\ (f; f_1, \dots, f_p) &\mapsto (f_1 \vee \dots \vee f_p) \circ f. \end{aligned}$$

L'opérade Q est limite inductive des sous-opérades $Q_p^{(n)} = \Omega^n(\bigvee^{p} S^n)$. Du fait que pour un espace pointé $(X, *)$, le produit cartésien $(\Omega^n X)^p$ s'identifie à l'espace fonctionnel $\mathbf{Top}_*(\bigvee^{p} S^n, X)$, les espaces de lacets n-fois itérés $\Omega^n X$ sont munis d'une structure canonique de $Q^{(n)}$-espace induite par

$$\begin{aligned} (\mu_{\Omega^n X})_p : Q_p^{(n)} \times (\Omega^n X)^p &\to \Omega^n X \\ (f; f_1, \dots, f_p) &\mapsto (f_1 \vee \dots \vee f_p) \circ f. \end{aligned}$$

Un *espace de lacets infini* Y est l'espace de base $Y = Y_0$ d'un *spectre* $(Y_i, \epsilon_i)_{i \geqslant 0}$ dont les applications structurales $\epsilon_i : Y_i \to \Omega Y_{i+1}$ sont des *homéomorphismes*. L'homéomorphisme composé

$$\omega_n = \Omega^{n-1}\epsilon_{n-1} \circ \Omega^{n-2}\epsilon_{n-2} \circ \dots \circ \epsilon_0 : Y \to \Omega^n Y_n$$

munit alors Y d'une structure d'espace de lacets n-fois itéré et par conséquent d'une action canonique de l'opérade $Q^{(n)}$.

Comme les inclusions $i^{(n)} : Q^{(n)} \to Q^{(n+1)}$ sont définies par suspension, la S-Ω-adjonction montre que pour $n \geqslant 0$ et $p > 0$ le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Q_p^{(n)} \times (\Omega^n Y_n)^p & \xrightarrow{\mu_{\Omega^n Y_n}} & \Omega^n Y_n \\ {\scriptstyle i_p^{(n)} \times (\Omega^n \epsilon_n)^p} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \Omega^n \epsilon_n} \\ Q_p^{(n+1)} \times (\Omega^{n+1} Y_{n+1})^p & \xrightarrow{\mu_{\Omega^{n+1} Y_{n+1}}} & \Omega^{n+1} Y_{n+1}. \end{array}$$

Il s'ensuit que la famille des homéomorphismes $\omega_n : Y \to \Omega^n Y_n$ munit l'espace de lacets infini Y d'une action canonique de l'opérade Q.

DÉFINITION 2.6. — *Une opérade* $(\mathcal{O}, \mu, \eta)$ *est dite* cellulaire *si la préopérade sous-jacente est cellulaire de sorte que la multiplication* $\mu^{\mathcal{O}}_{i_1 \dots i_p}$ *applique tout produit de cellules dans la cellule prescrite par l'opérade du graphe complet :*

$$\mu^{\mathcal{O}}_{i_1 \dots i_p}(\mathcal{O}^{(\mu,\sigma)}_p \times \mathcal{O}^{(\mu_1,\sigma_1)}_{i_1} \times \dots \times \mathcal{O}^{(\mu_p,\sigma_p)}_{i_p}) \subseteq \mathcal{O}^{(\mu(\mu_1,\dots,\mu_p),\sigma(\sigma_1,\dots,\sigma_p))}_{i_1+\dots+i_p}.$$

La filtration naturelle de $\mathcal{O}$ *définit en particulier des* sous-opérades $\mathcal{O}^{(n)}$.

Exemples 2.7. — (a) *L'opérade simpliciale* Γ *de Barratt-Eccles.*

Comme le foncteur W (1.3a) commute avec le produit cartésien, l'unité et la multiplication de l'opérade $\mathfrak{S}$ induisent une unité et une multiplication du foncteur composé $\Gamma = W\mathfrak{S}$ qui en font une opérade cellulaire. Pour établir que la multiplication $\mu^{\Gamma}_{i_1 \dots i_p} = W\mu^{\mathfrak{S}}_{i_1 \dots i_p}$ préserve la structure cellulaire, il suffit de vérifier les formules suivantes qui découlent immédiatement de la définition de l'opérade des permutations, cf. 1.14, 2.5a-b :

$$\phi^*_{\psi_r(i),\psi_s(j)}(\mu^{\mathfrak{S}}_{i_1 \dots i_p}(\sigma; \sigma_1, \dots, \sigma_p)) = \begin{cases} \phi^*_{ij}(\sigma_r) & \text{pour } i, j \in \mathbf{i_r},\ r = s, \\ \phi^*_{rs}(\sigma) & \text{pour } i \in \mathbf{i_r}, j \in \mathbf{i_s}, r < s. \end{cases}$$

La *filtration de Smith* $\Gamma^{(n)} = \{x \in \Gamma \mid \phi^*_{ij}(x) \in sk_{n-1}\Gamma_2 \text{ pour } i < j\}$ est donc compatible avec la structure d'opérade de Γ et le théorème de comparaison de Fiedorowicz (2.8) montre que les sous-opérades $\Gamma^{(n)}$ sont des E_n*-opérades* au sens de May (2.9) : L'action de $\Gamma^{(n)}$ (resp. Γ) sur un ensemble simplicial connexe X induit en particulier une équivalence faible entre le réalisé de X et un espace de lacets n-fois itéré (resp. un espace de lacets infini). Le cas $n = \infty$ était la motivation initiale de Barratt-Eccles [3].

(b) *L'opérade des petits cubes de Boardman-Vogt.*

L'opérade Q n'est pas cellulaire, mais elle contient une sous-opérade cellulaire. En fixant des homéomorphismes $\rho_n : S^n \cong [0,1]^n/\partial[0,1]^n$ compatibles avec la suspension, l'*opérade des petits n-cubes* $\mathcal{C}^{(n)}$ est la sous-opérade de $Q^{(n)}$ formée par l'ensemble des $f \in Q^{(n)}_p$ dont l'application conjuguée $\tilde{f} = (\bigvee^p \rho_n) f \rho_n^{-1}$ est induite par une application pointée affine

$$\tilde{f} :]0,1[^n \to \bigvee^p [0,1]^n/\partial[0,1]^n.$$

telle que l'image réciproque de l'intérieur de chacun des p exemplaires $[0,1]^n$ soit un "petit n-cube" plongé dans $]0,1[^n$ *avec des faces parallèles* (voir [6] et [13]).

Si nous identifions l'intérieur de $[0,1]^n$ à l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, alors une Λ-rétraction $r^{(n)} : \mathcal{C}^{(n)} \to F^{(n)}$ (1.3b) est définie en appliquant $f \in \mathcal{C}_p^{(n)}$ sur le p-uplet des *centres* des p "petits n-cubes" associés à $\tilde{f}$. La rétraction $r^{(n)}$ induit en fait une Λ-équivalence $r^{(n)} : \mathcal{C}^{(n)} \xrightarrow{\sim} F^{(n)}$ pour tout n, compatible avec les inclusions respectives. En passant à la limite inductive, nous obtenons une *opérade* $\mathcal{C} = \varinjlim_n \mathcal{C}^{(n)}$ Λ-équivalente à la préopérade cellulaire F.

Or, la multiplication des petits cubes est intimement liée à la multiplication de l'opérade du graphe complet comme en témoigne la structure cellulaire que nous allons expliciter. Cette structure cellulaire ainsi que le théorème de comparaison qui en découle nous ont été communiqués par *Fiedorowicz.*

Nous remplacerons l'application $f \in \mathcal{C}_p$ par la configuration des petits cubes $(c_1, \ldots, c_p)$ associée à $\tilde{f}$ et nous noterons $c_i \square_n c_j$ si *les deux cubes sont séparés par un hyperplan perpendiculaire à un des premiers n axes de coordonnées ou si, le cas échéant, ils sont séparés par un hyperplan H_{n+1} perpendiculaire au $(n+1)$-ème axe de sorte que c_i se trouve du côté négatif et c_j du côté positif de H_{n+1}.*

Ce dernier cas sera distingué en notant $c_i \boxdot_n c_j$.

Pour $(\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_p$ la cellule associée est alors définie par

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{C}}_p^{(\mu,\sigma)} = \{(c_1, c_2, \ldots, c_p) \in \mathcal{C}_p \mid c_i \underset{\mu_{ij}}{\square} c_j \text{ si } \sigma(i) < \sigma(j), \text{ et} \\ c_j \underset{\mu_{ij}}{\square} c_i \text{ si } \sigma(j) < \sigma(i) \text{ pour } 1 \leqslant i < j \leqslant p\}.\end{aligned}$$

Cette structure cellulaire est compatible avec la Λ-structure et la structure multiplicative de l'opérade des petits cubes. En effet, la multiplication $\mu^{\mathcal{C}}_{i_1 \ldots i_p}$ applique $(\gamma; \gamma_1, \ldots, \gamma_p) \in \mathcal{C}_p \times \mathcal{C}_{i_1} \times \ldots \times \mathcal{C}_{i_p}$ sur la configuration obtenue en *substituant* aux p petits cubes de γ les p configurations $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_p}$. L'étiquetage du graphe complet (2.5b) correspond ainsi à l'existence de certains hyperplans séparants.

En outre, la filtration "cellulaire" $\hat{\mathcal{C}}^{(n)}$ se projette sur la filtration "géométrique" $\mathcal{C}^{(n)}$ par une fibration à fibres contractiles. Il reste donc à vérifier que pour tout $(\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_p^{(n)}$ la cellule $\hat{\mathcal{C}}_p^{(\mu,\sigma)}$, ou de manière équivalente, la cellule projetée $\mathcal{C}_p^{(\mu,\sigma)} = \hat{\mathcal{C}}_p^{(\mu,\sigma)} \cap \mathcal{C}^{(n)}$ est contractile. Or supposons que $\mathcal{C}_p^{(\mu,\sigma)}$ contient un point intérieur $(c_1, \ldots, c_p)$, c'est-à-dire $c_i \boxdot_{\mu_{ij}} c_j$ si $\sigma(i) < \sigma(j)$, et $c_j \boxdot_{\mu_{ij}} c_i$ si $\sigma(j) < \sigma(i)$. La cellule $\mathcal{C}_p^{(\mu,\sigma)}$ se contracte alors sur $(c_1, \ldots, c_p)$ par une contraction *affine* en n temps qui déforme les petits n-cubes coordonnée par coordonnée en commençant par la dernière coordonnée et en terminant par la première coordonnée. L'ordre décroissant garantit que la contraction se fait dans la cellule car les hyperplans appropriés existent tout au long de la contraction.

Comme l'ensemble $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ des cellules d'intérieur non vide est caractérisé par la propriété que $\alpha \in \mathcal{K}(\mathcal{C})_p$ si et seulement si $\alpha_{ij} = \alpha_{jk}$ implique $\alpha_{ij} = \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$ pour tout $i < j < k$, l'inclusion de $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{K}$ admet un adjoint à droite ce qui montre que toutes les cellules sont contractiles. Aussi retrouvons-nous le résultat de Dunn [9] que l'opérade des configurations *décomposables* de petits cubes est équivalente à $\mathcal{C}$. En effet, en posant (cf. 2.5c)

$$\mathcal{C}_{\mathrm{dec},p} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{M}_p} \hat{\mathcal{C}}_p^{(\alpha)}$$

et en projetant $\hat{\mathcal{C}}^{(n)}$ sur $\mathcal{C}^{(n)}$, nous obtenons exactement l'opérade $\mathcal{C}_{\mathrm{dec}}^{(n)}$ des configurations décomposables de petits n-cubes de Dunn (cf. 1.11a, [9], [1]), et la dite équivalence d'opérades résulte (via 1.17c) de la chaîne d'inclusions

$$\mathcal{K}(F) \hookrightarrow \mathcal{M} = \mathcal{K}(\mathcal{C}_{\mathrm{dec}}) \hookrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathcal{K}.$$

Dans la terminologie de May [13] une opérade *multiplicativement Λ-équivalente* à $\mathcal{C}^{(n)}$ est dite *E_n-opérade.* L'importance de la structure cellulaire de $\mathcal{C}$ provient du théorème de comparaison suivant :

THÉORÈME 2.8 (Fiedorowicz). — *Toute opérade cellulaire $\mathcal{O}$ est une E_∞-opérade et les sous-opérades $\mathcal{O}^{(n)}$ sont des E_n-opérades.*

Preuve. – Etant donné que l'opérade des petits cubes est cellulaire, il suffit de montrer que deux opérades cellulaires ont des filtrations multiplicativement Λ-équivalentes, ou encore que toute opérade cellulaire $\mathcal{O}$ est multiplicativement Λ-équivalente à la réalisation géométrique de l'opérade du graphe complet.

Or, la colimite homotopique $(\text{h-}\varinjlim_{\alpha \in \mathcal{K}_p} \mathcal{O}_p^{(\alpha)})_{p>0}$ définit une *opérade* d'après le lemme principal de la section 5 de [1] et les deux projections naturelles sur $\mathcal{O}$ resp. $|\mathcal{N}\mathcal{K}|$ sont des Λ-équivalences (multiplicatives) en vertu du lemme 1.8 et du théorème 1.11. □

Par restriction de l'action canonique de $Q^{(n)}$ (resp. de Q), tout espace de lacets n-fois itéré (resp. infini) est muni d'une action canonique de l'opérade des petits n-cubes $\mathcal{C}^{(n)}$ (resp. de l'opérade des petits cubes $\mathcal{C}$). Les *théorèmes d'approximation et de détection* de May et Cohen que nous rappelons ci-dessous montrent qu'inversement, tout espace muni d'une action d'une E_n-opérade est à complétion en groupe près un espace de lacets n-fois itéré. Grâce au *théorème de comparaison* de Fiedorowicz, la théorie des E_n-opérades de May s'appliquent à la filtration naturelle d'une opérade cellulaire $\mathcal{O}$. La seule spécificité de l'opérade des petits n-cubes est la "monadicité" de l'approximation $\alpha_n : \mathcal{C}^{(n)} \to \Omega^n S^n$ due au fait que $\mathcal{C}$ est une sous-opérade de Q. Cette monadicité n'est pas donnée en général et elle permet notamment de considérer la catégorie des espaces de lacets n-fois itérés (resp. infinis) comme une sous-catégorie *pleine* de la catégorie des $\mathcal{C}^{(n)}$-espaces (resp. $\mathcal{C}$-espaces).

Rappelons qu'une H-application entre H-espaces $\omega : X \to Y$ est appelée une *complétion en groupe* si $\pi_0(\omega) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ est la complétion en groupe universelle et si $H_*(\omega; A) : H_*(X; A) \to H_*(Y; A)$ est la localisation par rapport au monoïde $\pi_0(X)$ pour tout anneau de coefficients A.

THÉORÈME 2.9 (May [13], [14], Cohen [7], Segal [17], Smith [18]).

(a) *Il existe une transformation naturelle de monades* $\alpha_n : \mathcal{C}^{(n)} \dot{\to} \Omega^n S^n$ *compatible avec les inclusions respectives et telle que pour tout espace* X, *l'application induite* $\alpha_n(X) : \mathcal{C}^{(n)}(X) \to \Omega^n S^n(X)$ *soit une complétion en groupe.*

(b) *Tout* $\mathcal{C}^{(n)}$-*espace* X *admet une* $\mathcal{C}^{(n)}$-*complétion en groupe* $\omega_n : X \to \Omega^n Y_n$ *telle que l'espace délacé* Y_n *soit le réalisé d'une construction bar généralisée.*

(c) *Tout* $\mathcal{C}$-*espace* X *est l'espace de base d'un spectre* $(Y_i, \epsilon_i)_{i \geqslant 0}$ *dont les morphismes composés* $\omega_n : X \to \Omega^n Y_n$ *sont les complétions en groupe déduites des actions de* $\mathcal{C}^{(n)}$ *sur* X. *En particulier, l'espace* X *admet une* $\mathcal{C}$-*complétion en groupe* $\omega : X \to Y$ *en l'espace de lacets infini* $Y = \varinjlim_i \Omega^i Y_i$.

Preuve. — Nous esquissons la preuve qui se scinde de manière naturelle en deux parties : une partie *catégorielle* qui utilise la monadicité de l'approximation $\alpha_n(X)$ pour en déduire à la fois l'existence du n-classifiant $Y_n = |\mathcal{B}(S^n, \mathcal{C}^{(n)}, X)|$ et l'agencement des Y_n en spectre, et une partie *géométrique* qui établit que $\alpha_n(X)$ est une complétion en groupe.

Pour la première partie nous renvoyons à May [13]. L'idée de preuve pour la seconde partie est de décomposer $\alpha_n(X)$ (au moins à homotopie près) en

$$\mathcal{C}^{(n)}(X) \overset{\phi_n(X)}{\rightarrow} \Omega\mathcal{C}^{(n-1)}SX \overset{\Omega\phi_{n-1}(SX)}{\rightarrow} \Omega^2\mathcal{C}^{(n-2)}S^2X \rightarrow \dots \Omega^{n-1}\mathcal{C}\,S^{n-1}X \overset{\Omega^{n-1}\phi_1(S^{n-1}X)}{\rightarrow} \Omega^n S^n X$$

et de montrer que $\phi_n(X)$ est une complétion en groupe pour tout n et tout X. L'application $\phi_n(X)$ est construite comme section du morphisme de connexion d'une quasifibration (cf. 1.19, [13], [18]) :

$$\mathcal{C}^{(n)}(X) \hookrightarrow \mathcal{C}^{(n-1)}(CX,X) \twoheadrightarrow \mathcal{C}^{(n-1)}(SX), \text{ où}$$
$$\mathcal{C}^{(n-1)}(CX,X) = \Big(\bigsqcup_{p>0}\bigsqcup_{r+s=p} \mathcal{C}^{(n-1)}_{r,s} \times_{\mathfrak{S}_r\times\mathfrak{S}_s} (CX-X)^r \times X^s\Big)/\sim.$$

May montre que l'espace total de cette quasifibration est *contractile*, ce qui établit l'existence de $\phi_n(X)$. Or, en utilisant l'adjonction entre la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial et le complexe singulier total d'un espace topologique, nous pouvons supposer que X est un ensemble simplicial et remplacer l'endofoncteur $\mathcal{C}^{(n)}$ par l'endofocteur $\Gamma^{(n)}$ associé à la filtration de Smith de l'opérade simpliciale Γ. Smith montre alors que l'espace total $\Gamma^{(n-1)}(CX,X)$ est un *monoïde simplicial libre* contenant $\Gamma^{(n)}(X)$ comme sous-monoïde. La complétion en groupe *universelle* de cette quasifibration définit alors une fibration principale d'espace total contractile, ce qui montre que la section "complétée" est une équivalence d'homotopie faible, *i.e.* la section $\phi_n(X)$ elle-même est une complétion en groupe, confirmant ainsi les calculs homologiques de Cohen [7]. □

Pour une opérade cellulaire $\mathcal{O}$, l'approximation

$$\alpha_n(X) : \mathcal{O}^{(n)}(X) \rightarrow \Omega^n S^n(X)$$

déduite des sections $\phi_n(X)$ serait *monadique* si $\phi_n(X)$ était construite à l'aide d'une contraction *conique* de l'espace total $\mathcal{O}^{(n-1)}(CX,X)$ compatible avec l'action de $\mathcal{O}^{(n)}(X)$. Cela identifierait en quelque sorte l'espace total $\mathcal{O}^{(n-1)}(CX,X)$ au $\mathcal{O}^{(n)}(X)$-fibré universel $E\mathcal{O}^{(n)}(X)$ et la base $\mathcal{C}^{(n-1)}(SX)$ à l'espace classifiant $B\mathcal{O}^{(n)}(X)$, cf. [17].

COROLLAIRE 2.10. — *Soit X une petite catégorie, un ensemble partiellement ordonné, resp. un ensemble simplicial selon le cas, et soit $1 \leqslant n \leqslant \infty$.*

(a) *La complétion en groupe de* $|\mathcal{M}^{(n)}(X)|$, $|\mathcal{K}^{(n)}(X)|$, *resp.* $|\Gamma^{(n)}(X)|$, *est faiblement équivalente à* $\Omega^n S^n|X|$.

(b) *Si* X *est muni d'une action de* $\mathcal{M}^{(n)}$, $K^{(n)}$, *resp.* $\Gamma^{(n)}$, *alors la complétion en groupe de son réalisé est faiblement équivalente à un espace de lacets n-fois itéré.*

Preuve. – Comme les opérades cellulaires $\mathcal{C}^{(n)}$, $\mathcal{M}^{(n)}$, $\mathcal{K}^{(n)}$, $\Gamma^{(n)}$ sont toutes Λ-équivalentes, (a) découle de 2.9a. Comme les Λ-équivalences impliquées sont multiplicatives, le réalisé de X est faiblement équivalent à un $\mathcal{C}^{(n)}$-espace, et (b) découle de 2.9b-c. □

3. Les permutoèdres de Milgram.

Le premier modèle combinatoire de l'endofoncteur $\Omega^k S^k$ est dû à Milgram [15] qui introduit pour cela une famille de polytopes convexes, riches en symétries : les *permutoèdres*. Comme Kapranov [11], nous noterons P_n le permutoèdre plongé dans $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire l'enveloppe convexe de l'ensemble des points

$$(\sigma(1), \ldots, \sigma(n)) \in \mathbf{R}^n,$$

où σ parcourt le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Il faut interpréter P_n comme un modèle cellulaire de l'espace fonctionnel $\tilde{P}_n = \mathbf{Top}_{**}([0,1],[0,1]^n)$ des chemins reliant sommet "initial" $(0,\ldots,0)$ et sommet "final" $(1,\ldots,1)$ du n-cube standard. Le passage de l'espace fonctionnel au modèle cellulaire a été précisé par Baues [2], une version simpliciale peut être déduite du foncteur I que nous avons introduit dans [4].

L'objectif de cette partie est d'insérer les constructions de Milgram dans la théorie générale des opérades cellulaires telle que nous l'avons développée dans les deux premières parties. En effet, pour tout $k > 0$, il existe une *opérade* $J^{(k)}$ de la forme $J_n^{(k)} = (P_n)^{k-1} \times \mathfrak{S}_n/\sim$ pour une certaine relation d'équivalence cellulaire portant uniquement sur les cellules du bord de $(P_n)^{k-1}$. La monade associée s'identifie à la construction J_k de Milgram et fournit donc un modèle de $\Omega^k S^k$ si elle est appliquée à un CW-complexe connexe [15].

L'intérêt de la construction de Milgram est double : d'une part sa structure cellulaire est dans un certain sens *minimale*, d'autre part la combinatoire du permutoèdre P_n est intimement liée à la combinatoire du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$: le permutoèdre est en fait l'unique polytope simple dont le 1-squelette est le graphe régulier qui réalise l'*ordre de Bruhat faible* du groupe symétrique, cf. [5].

Comme résultat principal nous obtenons une Λ-*équivalence* reliant les opérades de Milgram $J^{(k)}$ aux E_k-opérades ordonnées $K^{(k)}$, ce qui constitue une preuve combinatoire du théorème d'approximation de Milgram. Il est instructif de voir de quelle manière l'ordre partiel défini sur $K_n^{(k)}$ reflète la structure cellulaire de P_n et la relation d'équivalence qui définit l'espace quotient $J_n^{(k)}$.

NOTATION 3.1. — *Nous identifierons dans la suite la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ au sommet $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ du permutoèdre P_n. Chaque face du permutoèdre est l'enveloppe convexe d'un certain ensemble d'éléments du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ que nous appellerons admissible. L'ensemble des parties admissibles ordonné par inclusion sera noté $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_n)$.*

L'ordre de Bruhat faible (à gauche) sur $\mathfrak{S}_n$ peut être caractérisé à l'aide de la Λ-structure de $\mathfrak{S}$ (1.3) par $\sigma \leqslant \tau \Leftrightarrow \phi_{ij}^*(\sigma) \leqslant \phi_{ij}^*(\tau)$ pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n$, où le groupe symétrique $\mathfrak{S}_2$ est ordonné par $[12] < [21]$.

DÉFINITION 3.2. — *Une* partition ordonnée *d'un entier $n > 0$ est une décomposition ordonnée $n = i_1 + \ldots + i_r$ en somme d'entiers $i_k > 0$. Nous lui associons la décomposition en somme directe de l'ensemble $\mathbf{n} = \{1, \ldots, n\}$ selon*

$$(\psi_1, \ldots, \psi_r) : \mathbf{i_1} + \ldots + \mathbf{i_r} \xrightarrow{\sim} \mathbf{n}$$

où $\psi_k(\mathbf{i_k}) = \{i_1 + \ldots + i_{k-1} + 1, \ldots, i_1 + \ldots + i_k\}$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$.

Nous noterons $\mathfrak{S}_{(i_1,\ldots,i_r)}$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ formé par l'ensemble des permutations $\sigma_1 \oplus \ldots \oplus \sigma_r$ avec $\sigma_k \in \mathfrak{S}_{i_k}$ (2.5a). Il est canoniquement isomorphe au produit cartésien $\mathfrak{S}_{i_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{i_r}$.

LEMME 3.3. — *L'ensemble des faces du permutoèdre P_n est en bijection canonique avec l'ensemble $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_n)$ des classes résiduelles à droite $\mathfrak{S}_{(i_1,\ldots,i_r)}\sigma \in \mathfrak{S}_{(i_1,\ldots,i_r)} \backslash \mathfrak{S}_n$, où $(i_1, \ldots, i_r)$ parcourt les partitions ordonnées de n.*

Toute classe résiduelle $\mathfrak{S}_{(i_1,\ldots,i_r)}\sigma$ est un intervalle pour l'ordre de Bruhat faible dont l'élement initial (resp. final) est donné par l'unique permutation $\tau \in \mathfrak{S}_{(i_1,\ldots,i_r)}\sigma$ telle que τ^{-1} soit croissante (resp. décroissante) en restriction aux blocs $\psi_k(\mathbf{i_k})$.

LEMME 3.4. — *Il existe une unique structure de préopérade affine sur la famille des permutoèdres P_n qui prolonge celle définie sur les ensembles de sommets $\mathfrak{S}_n$.*

Preuve. – L'unicité est claire. Pour l'existence il suffit, d'après le lemme précédent, de vérifier que pour tout morphisme $\phi \in \Lambda(\mathbf{m},\mathbf{n})$, l'image par ϕ^* d'une classe résiduelle $\mathfrak{S}_{(i_1,\dots,i_r)}\sigma \in \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n)$ forme une classe résiduelle appartenant à $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_m)$. Or, on a la formule générale : $\phi^*(\mathfrak{S}_{(i_1,\dots,i_r)}\sigma) = \mathfrak{S}_{(\phi^{cr})^*(i_1,\dots,i_r)}\phi^*(\sigma)$, où $(\phi^{cr})^*(i_1,\dots,i_r)$ désigne la partition ordonnée la moins fine de m dont l'image par ϕ^{cr} est subordonnée à la partition $(i_1,\dots,i_r)$. □

Remarque 3.5. — Notre description des faces du permutoèdre P_n est duale de celle utilisée usuellement ([15],[2],[11]), où l'on considère les classes à gauche et l'action du groupe symétrique par multiplication à gauche. Notre choix est cependant imposé par la définition de la catégorie Λ qui veut que les permutations opèrent sur elles-mêmes par multiplication à droite. La face correspondant à la classe résiduelle $\mathfrak{S}_{(i_1,\dots,i_r)}\sigma$ est donc l'enveloppe convexe de l'ensemble des sommets $(\tau(1),\dots,\tau(n)) \in \mathbf{R}^n$, où τ parcourt $\mathfrak{S}_{(i_1,\dots,i_r)}\sigma$. L'opération *contravariante* du groupe symétrique sur $\mathbf{R}^n$ s'identifie alors à la multiplication *à droite* du groupe symétrique sur $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_n)$.

La structure *multiplicative* des opérades de Milgram repose formellement sur l'existence d'une multiplication des permutoèdres $(P_n)_{n>0}$ telle que $\mu^P_{i_1\dots i_n}$ applique le bord de $P_n \times P_{i_1} \times \dots \times P_{i_n}$ sur le bord de $P_{i_1+\dots+i_n}$. Or, la multiplication de l'opérade des permutations s'étend de maniére naturelle aux 1-squelettes des permutoèdres à l'aide de l'ordre de Bruhat faible. En effet, chaque sommet $\sigma \in P_n$ est muni d'un $(n-1)$-*repère canonique* f_σ formé par l'ensemble des arêtes σ-incidentes de la *subdivision barycentrique* du 1-squelette de P_n. L'*enveloppe simpliciale* de f_σ, *i.e.* la réunion des n-simplexes de la subdivision barycentrique de P_n dont le 1-squelette contient une arête de f_σ, est un $(n-1)$-cube simplicial bipointé par σ et le barycentre de P_n. La *décomposition en repères* $(f_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}$ du 1-squelette de P_n induit de cette façon une décomposition *cubique* du permutoèdre P_n, cf. [2].

LEMME 3.6. — *L'opérade des permutations induit une structure d'opérade sur les 1-squelettes (subdivisés barycentriquement) des permutoèdres telle que l'image d'un repère-produit $f_\sigma \times f_{\sigma_1} \times \dots \times f_{\sigma_n} \in$*

$P_n \times P_{i_1} \times \ldots \times P_{i_n}$ définisse un repère $f_{(\sigma;\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} \in P_{i_1+\ldots+i_n}$ dont l'enveloppe simpliciale est un $(i_1 + \ldots + i_n - 1)$-cube simplicial bipointé par $\sigma(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ et le barycentre de $P_{i_1+\ldots+i_n}$.

Preuve. — Chaque face du permutoèdre est l'enveloppe convexe d'un intervalle *admissible* $[\sigma, \tau]$ de $\mathfrak{S}_n$. L'enveloppe convexe de $\{\sigma, \tau\}$ est donc une *géodésique* reliant σ et τ et contenant le barycentre de la face comme son barycentre. Or, tout intervalle $[\sigma, \tau]$ de $\mathfrak{S}_n$ se décompose de manière unique en une chaîne d'intervalles admissibles maximaux et définit donc par juxtaposition une géodésique reliant σ et τ. Nous appellerons *barycentre* de l'intervalle $[\sigma, \tau]$ le barycentre de cette géodésique.

Les sommets extrémaux du $(n - 1)$-repère simplicial f_σ sont alors précisément les barycentres des intervalles formés par σ et ses éléments adjacents dans $\mathfrak{S}_n$. De manière générale, les sommets extrémaux du repère-produit $f_\sigma \times f_{\sigma_1} \times \ldots \times f_{\sigma_n}$ sont les barycentres des intervalles formés par $(\sigma; \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ et ses éléments adjacents dans $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_{i_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{i_n}$. L'image par $\mu^{\mathfrak{S}}_{i_1\ldots i_n}$ de ces intervalles forme une famille d'intervalles (non admissibles en général) contenant $\sigma(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ comme sommet commun. Le repère-image $f_{(\sigma;\sigma_1,\ldots,\sigma_n)}$ est alors donnée par la famille des géodésiques reliant $\sigma(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ aux barycentres des intervalles-image.

Ces géodésiques sont contenues dans le 1-squelette de la subdivision barycentrique du permutoèdre $P_{i_1+\ldots+i_n}$ et ont la structure simpliciale d'une chaîne de 1-simplexes d'orientations alternées. Comme dans le cas des repères canoniques, l'enveloppe simpliciale de $f_{(\sigma;\sigma_1,\ldots,\sigma_n)}$ est isomorphe au produit cartésien des composantes du repère. □

La *multiplication permutoédrale* $\mu^P_{i_1\ldots i_n}$ est alors définie par extension *cubique* de la multiplication 1-squelettale déduite de $\mu^{\mathfrak{S}}_{i_1\ldots i_n}$. Cette définition est compatible avec la structure de préopérade affine définie ci-dessus, car les repères-image définis par une Λ-action sont des repères canoniques.

LEMME 3.7. — *Soit c_α une face du permutoèdre P_n de sommet initial τ et soit $\mathfrak{S}_{(i_1,\ldots,i_r)}\tau$ la classe résiduelle dont elle est l'enveloppe convexe. L'application*

$$D^\tau_{(i_1,\ldots,i_r)} = \tau^* \circ (\psi_1^* \times \ldots \times \psi_r^*) \circ (\tau^{-1})^* : P_n \to c_\alpha$$

définit alors un projecteur convexe d'image c_α, où le produit cartésien $P_{i_1} \times \ldots \times P_{i_r}$ est identifié à l'enveloppe convexe du sous-groupe $\mathfrak{S}_{(i_1,\ldots,i_r)}$ par extension affine de l'isomorphisme canonique

$$\mathfrak{S}_{i_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{i_r} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_{(i_1,\ldots,i_r)}.$$

DÉFINITION 3.8. — Les *opérades de Milgram* $J^{(k)}$ sont définies par :

$$J_n^{(k)} = (P_n)^{k-1} \times \mathfrak{S}_n / \sim .$$

La relation d'équivalence porte sur les points du bord de $(P_n)^{k-1}$. Plus précisément, pour tout point $(x_1, \ldots, x_{k-1}) \in (P_n)^{k-1}$ dont une composante x_s appartient à l'enveloppe convexe d'un sous-groupe strict $\mathfrak{S}_{(i_1,\ldots,i_r)}$ de $\mathfrak{S}_n$ et tout couple de permutations $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ tel que τ soit le sommet initial de la classe $\mathfrak{S}_{(i_1,\ldots,i_r)}\tau$, on a la relation :

$$\begin{gathered}(\tau^*(x_1), \ldots, \tau^*(x_{k-1}); \sigma) \sim \\ (x_1, \ldots, x_s, D^{\mathrm{id}}_{(i_1,\ldots,i_r)}(x_{s+1}), \ldots, D^{\mathrm{id}}_{(i_1,\ldots,i_r)}(x_{k-1}); \tau\sigma).\end{gathered}$$

L'action des morphismes de la catégorie Λ est induite par

$$\begin{aligned}&\phi^* : (P_n)^{k-1} \times \mathfrak{S}_n \to (P_m)^{k-1} \times \mathfrak{S}_m \\ &\quad (x_1, \ldots, x_{k-1}; \tau) \mapsto (((\tau\phi)^{cr})^*(x_1), \ldots, ((\tau\phi)^{cr})^*(x_{k-1}); (\tau\phi)^{\natural}).\end{aligned}$$

La multiplication $\mu^J_{i_1\ldots i_n}$ est la multiplication diagonale induite par les multiplications $\mu^P_{i_1\ldots i_n}$ et $\mu^{\mathfrak{S}}_{i_1\ldots i_n}$.

Une inclusion canonique $J^{(k)} \hookrightarrow J^{(k+1)}$ est définie en identifiant $(P_n)^{k-1}$ à l'ensemble des points de $(P_n)^k$ dont la première composante est le barycentre du permutoèdre, *i.e.* le point fixe de l'action de $\mathfrak{S}_n$.

Remarque 3.9. — La relation d'équivalence qui définit $J_n^{(k)}$ est compatible avec l'action des morphismes de la catégorie Λ, puisque d'une part les permutations $\phi \in \Lambda(\mathbf{n}, \mathbf{n})$ n'opèrent que sur la dernière composante de $(P_n)^{k-1} \times \mathfrak{S}_n$, et cela par multiplication à droite, et que d'autre part, pour un morphisme *croissant* $\phi \in \Lambda^{cr}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$, nous obtenons sous les hypothèses de 3.8 :

$$\begin{gathered}\phi^*(\tau^*(x_1), \ldots, \tau^*(x_{k-1}); \mathrm{id}_{\mathbf{n}}) = (\phi^*\tau^*(x_1), \ldots, \phi^*\tau^*(x_{k-1}); \mathrm{id}_{\mathbf{m}}) \\ = (\tau_{\natural}^*\phi_\tau^*(x_1), \ldots, \tau_{\natural}^*\phi_\tau^*(x_{k-1}); \mathrm{id}_{\mathbf{m}}) \sim \\ (\phi_\tau^*(x_1), \ldots, \phi_\tau^*(x_s), D^{\mathrm{id}}_{\phi_\tau^*(i_1,\ldots,i_r)}(\phi_\tau^* x_{s+1}), \ldots, D^{\mathrm{id}}_{\phi_\tau^*(i_1,\ldots,i_r)}(\phi_\tau^* x_{k-1}); \tau_{\natural}) \\ = \phi^*(x_1, \ldots, x_s, D^{\mathrm{id}}_{(i_1,\ldots,i_r)}(x_{s+1}), \ldots, D^{\mathrm{id}}_{(i_1,\ldots,i_r)}(x_{k-1}); \tau),\end{gathered}$$

où pour alléger la notation, ϕ_τ désigne le morphisme $(\tau\phi)^{cr}$ et $\tau_{\natural}$ désigne la permutation $(\tau\phi)^{\natural} = \phi^*(\tau)$.

La multiplication $\mu^J_{i_1\ldots i_n}$ respecte la relation d'équivalence, puisque d'une part l'application qui à une face du permutoèdre associe son projecteur convexe commute avec les Λ-actions, et d'autre part la multiplication permutoédrale "préserve" le bord.

L'endofoncteur associé à la préopérade $J^{(k)}$ s'identifie à la construction J_k de Milgram [15] à la différence près que Milgram n'explicite que les relations associées aux cellules de codimension un, *i.e.* aux sous-groupes $\mathfrak{S}_{(i_1,i_2)}$ de $\mathfrak{S}_n$. C'est Baues [2] qui indique un système de relations complet, comparable au nôtre, surtout en tenant compte du lemme suivant :

LEMME 3.10. — *Chaque point x de l'espace quotient $J_n^{(k)}$ admet un représentant unique*

$$x_{\mathrm{can}} = (x_1, \ldots, x_{k-1}; \sigma) \in (P_n)^{k-1} \times \mathfrak{S}_n,$$

tel que, pour tout i, la cellule minimale c_i dont l'intérieur contient x_i soit l'enveloppe convexe d'un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ et tel que la suite des cellules soit décroissante : $c_1 \supset c_2 \supset \ldots \supset c_{k-1}$.

THÉORÈME 3.11. — *Les opérades $J^{(k)}$ forment la filtration canonique d'une opérade cellulaire.*

L'espace $J_n^{(k)}$ a en particulier le type d'homotopie $\mathfrak{S}_n$-équivariante de l'espace des configurations de n points distincts de $\mathbf{R}^k$ et la monade associée à $J^{(k)}$ est un modèle de la monade $\Omega^k S^k$ en restriction aux espaces connexes.

Preuve. — Il faut expliciter la structure cellulaire sous-jacente à la filtration $J^{(k)}$. Pour cela, nous indiquons d'abord une $\mathcal{K}_2$-décomposition cellulaire de la limite inductive $J_2 = \varinjlim_k J_2^{(k)}$, qui induira de manière formelle (en utilisant la structure de préopérade) une $\mathcal{K}_n$-décomposition en “cellules” de $J_n = \varinjlim_k J_n^{(k)}$. Toute la difficulté consistera à montrer que les “cellules” ainsi définies sont *contractiles*.

L'outil principal, outre la forme canonique qu'admettent les points de $J_n^{(k)}$, est une application $c : P_n \to \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n)$ associant à tout point x du permutoèdre la cellule *maximale* c_x telle qu'il existe une suite *croissante* de cellules $c_x \subset c_{\alpha_1} \subset \ldots \subset c_{\alpha_d}$ ayant la propriété que x appartient à l'enveloppe convexe des barycentres de ces cellules. Nous noterons b_x le barycentre de la cellule c_x. Les barycentres des cellules du permutoèdre sont laissés fixes par l'application $x \mapsto b_x$, tandis que pour un point “générique” $x \in P_n$ (*i.e.* à coordonnées barycentriques distinctes), b_x est le sommet “le plus proche” de x. Comme l'application c commute avec l'action de la catégorie Λ, on obtient pour $x \in P_n, \tau \in \mathfrak{S}_n$ et pour toute partition ordonnée $(i_1, \ldots, i_r)$ de n, les règles de commutation :

$$\tau^*(b_x) = b_{\tau^*(x)} \text{ et } D^{\mathrm{id}}_{(i_1,\ldots,i_r)}(b_x) = b_{D^{\mathrm{id}}_{(i_1,\ldots,i_r)}(x)}.$$

Il s'ensuit que l'application

$$\begin{aligned} b : (P_n)^{k-1} \times \mathfrak{S}_n &\to (P_n)^{k-1} \times \mathfrak{S}_n \\ (x_1, \ldots, x_{k-1}; \sigma) &\mapsto (b_{x_1}, \ldots, b_{x_{k-1}}; \sigma) \end{aligned}$$

passe au quotient $J_n^{(k)}$.

Les cellules *ouvertes* de J sont définies en posant pour $(m, \sigma) \in \mathcal{K}_2$:

$$\breve{J}_2^{(m,\sigma)} = \{x \in J_2^{(m+1)} \mid b(x)_{\text{can}} = (\mathrm{id}_\mathbf{2}, \ldots, \mathrm{id}_\mathbf{2}; \sigma)\},$$

et d'après les définitions 1.9 et la remarque 1.10 pour $(\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_n$:

$$\begin{aligned} \breve{J}_n^{(\mu,\sigma)} = \{x \in J_n^{(|\mu|+1)} \mid b(x)_{\text{can}} = (b_1, \ldots, b_{|\mu|}; \sigma)\,;\ &\phi_{ij}^*(b_s) = b_{P_2} \text{ (resp. } \mathrm{id}_\mathbf{2}) \\ &\text{pour } s \leqslant |\mu| - (\sigma^{*-1}\mu)_{ij} \text{ (resp. } s > |\mu| - (\sigma^{*-1}\mu)_{ij}) \\ &\text{et } 1 \leqslant i < j \leqslant n\}, \end{aligned}$$

où b_{P_2} désigne le barycentre de P_2. Les cellules *fermées* s'en déduisent formellement comme réunions disjointes de cellules ouvertes :

$$J_n^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta \leqslant \alpha, \beta \in \mathcal{K}_n} \breve{J}_n^{(\beta)}.$$

Il suffira de montrer (a) que l'inclusion de l'ensemble des cellules d'intérieur non vide $\mathcal{K}(J)_n$ dans $\mathcal{K}_n$ est une équivalence d'ensembles partiellement ordonnés et (b) qu'une cellule $J_n^{(\mu,\sigma)}$ d'intérieur non vide admet une contraction sur son "centre" $b^{(\mu,\sigma)}$, image commune par b des points $x \in \breve{J}_n^{(\mu,\sigma)}$.

Or, l'existence d'un centre $b_{\text{can}}^{(\mu,\sigma)} = (b_1, \ldots, b_{|\mu|}; \sigma)$ détermine d'après 3.10 une suite décroissante de cellules $c_1 \supset \ldots \supset c_{|\mu|}$, resp. de manière plus précise, une suite croissante de partitions ordonnées $\mathrm{part}_1 \prec \ldots \prec \mathrm{part}_{|\mu|}$ telle que c_s soit l'enveloppe convexe du sous-groupe $\mathfrak{S}_{\mathrm{part}_s}$ de $\mathfrak{S}_n$.

La condition $\phi_{ij}^*(b_s) = b_{P_2}$ pour $s \leqslant |\mu| - (\sigma^{*-1}\mu)_{ij}$ équivaut à la non-séparation du couple d'indices (i, j) par la partition part_s. Puisqu'il y a équivalence, pour tout triplet d'indices $i < j < k$, entre la non-séparation du couple (i, k) et la non-séparation des deux couples (i, j) et (j, k), nous obtenons, pour une cellule $J_n^{(\mu,\sigma)}$ d'intérieur non vide, l'équivalence pour tout s, entre l'inégalité $(\sigma^{*-1}\mu)_{ik} \leqslant |\mu| - s$ et les deux inégalités $(\sigma^{*-1}\mu)_{ij} \leqslant |\mu| - s$ et $(\sigma^{*-1}\mu)_{jk} \leqslant |\mu| - s$, ce qui se résume encore par la formule $\alpha_{ik} = \max(\alpha_{ij}, \alpha_{jk})$ pour $\alpha = (\mu, \sigma)$ et $i < j < k$. Inversement, supposons que $\alpha = (\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_n$ vérifie la dite formule pour tout triplet d'indices $i < j < k$, et soit part_s la partition ordonnée de n *la plus fine* ne séparant pas les couples d'indices (i,j) tels que $\alpha_{ij} \leqslant |\mu| - s$. Il résulte alors des définitions que le point de $J_n^{(|\mu|+1)}$ représenté par $(b_1, \ldots, b_{|\mu|}; \sigma)$, où b_s désigne le barycentre du sous-groupe $\mathfrak{S}_{\mathrm{part}_s}$ de $\mathfrak{S}_n$, appartient à l'intérieur de la cellule $J_n^{(\mu,\sigma)}$, en fait c'est son centre. En d'autres termes, l'ensemble des cellules d'intérieur non vide de J_n est indéxé par

$$\mathcal{K}(J)_n = \{\alpha \in \mathcal{K}_n \mid \alpha_{ik} = \max(\alpha_{ij}, \alpha_{jk}) \text{ pour } i < j < k\}.$$

Comme dans 1.17c, on en déduit (a).

Pour établir (*b*), nous allons montrer plus précisément que, par rapport à l'espace compact $J_n^{(k)}$, la famille des cellules $J_n^{(\mu,\sigma)}, (\mu,\sigma) \in \mathcal{K}(J)_n^{(k)}$, forme la décomposition cellulaire *duale* de celle définie par la famille des cellules du lemme 3.10. En effet, le centre $b^{(\mu,\sigma)}$ de $\check{J}_n^{(\mu,\sigma)}$ est le barycentre de $c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_{|\mu|} \times \{\sigma\}$ et l'application b est faite de sorte que l'intérieur cellulaire $\check{J}_n^{(\mu,\sigma)}$ soit le cône ouvert sur le joint combinatoire de $b^{(\mu,\sigma)}$. La cellule fermée étant le cône fermé, il reste à voir que l'adhérence formelle $J_n^{(\mu,\sigma)}$ coïncide avec l'adhérence topologique. Or, cela découle – par un argument de récurrence sur la dimension des cellules – du fait que l'ordre défini par l'inclusion des cellules $c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_{|\mu|} \times \{\sigma\}$ dans $J_n^{(k)}$ est *opposé* à l'ordre canonique de l'ensemble indexant $\mathcal{K}(J)_n^{(k)}$.

La limite inductive $J = \varinjlim_k J^{(k)}$ est donc une préopérade cellulaire, filtrée par les $J^{(k)}$, ce qui établit d'après le théorème 2.9a la deuxième partie de l'énoncé. La multiplication préserve la structure cellulaire puisqu'il découle des définitions que $\mu^J_{i_1\ldots i_n}(b^{(\mu,\sigma)}; b^{(\mu_1,\sigma_1)}, \ldots, b^{(\mu_n,\sigma_n)})$ appartient à la cellule $J_{i_1+\ldots+i_n}^{(\mu(\mu_1,\ldots,\mu_n),\sigma(\sigma_1,\ldots,\sigma_n))}$. □

Remarque 3.12. — En comparant la preuve précédante à la proposition 1.17, nous constatons que les ensembles des cellules d'intérieur non vide de la préopérade F et de l'opérade J se trouvent en bijection canonique. Cela est d'autant plus surprenant que les cellules de J sont compactes tandis que les cellules de F ne le sont pas. Il nous semble que cela est lié à l'existence d'une *compactification* naturelle des espaces de configuration $F(\mathbf{R}^k, n)$ introduite récemment par W. Fulton et R. MacPherson. En outre, la description alternative de l'ensemble partiellement ordonné $\mathcal{K}(F)_n^{(k)} = \mathcal{K}(J)_n^{(k)}$ à l'aide des suites croissantes de partitions ordonnées est intéressante en soi et révèle un autre aspect de la structure combinatoire des E_k-opérades.

À titre d'exemple, considérons le cas $k = 2$: Le nerf de l'ensemble $\mathcal{K}(F)_n^{(2)}$ représente alors précisément le complexe $E^{2n} - \Delta$ utilisé par R. Fox et L. Neuwirth [10] pour retrouver de manière algébrique la présentation par générateurs et relations du groupe de tresses à n brins

$$B_n = \pi_1(F(\mathbf{R}^2, n)/\mathfrak{S}_n).$$

Combinatoirement, le quotient $\mathcal{K}(F)^{(2)}_n/\mathfrak{S}_n$ s'identifie au quotient $\mathcal{K}(J)^{(2)}_n/\mathfrak{S}_n$ qui lui réalise un permutoèdre P_n dont sont identifiées toutes les faces du bord contenues dans une même orbite pour l'action canonique de $\mathfrak{S}_n$. En effet, l'ensemble de ces orbites est en bijection canonique avec l'ensemble des partitions ordonnées non triviales de n, chaque orbite contenant exactement une face de la forme $\mathfrak{S}_{(i_1,\ldots,i_r)}$ avec $i_1 + \ldots + i_r = n$ et $r \geqslant 2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BALTEANU, Z. FIEDOROWICZ, R. SCHWÄNZL et R. VOGT, Iterated monoidal categories, preprint (1995).

[2] H.-J. BAUES, Geometry of loop spaces and the cobar-construction, Mem. of the Amer. Math. Soc., 230 (1980).

[3] M. G. BARRATT et P. J. ECCLES, Γ^+-Structures I,II,III, Topology, 13 (1974), 25-45, 113-126, 199-207.

[4] C. BERGER, Un groupoïde simplicial comme modèle de l'espace des chemins, Bull. Soc. Math. France, 123 (1995), 1-32.

[5] R. BLIND et P. MANI, On puzzles and polytope isomorphism, Aequationes Math., 34 (1987), 287-297.

[6] J. M. BOARDMAN et R. M. VOGT, Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces, Lecture Notes in Math. 347, Springer Verlag (1973).

[7] F.R. COHEN, The homology of C_{n+1}-spaces, Lecture Notes in Math. 533, Springer Verlag (1976), 207-351.

[8] F.R. COHEN, J. P. MAY et L. R. TAYLOR, Splitting of certain spaces CX, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 84 (1978), 465-496.

[9] G. DUNN, Tensor product of operads and iterated loop spaces, Journal of Pure and Applied Algebra, 50 (1988), 237-258.

[10] R. FOX et L. NEUWIRTH, The braid groups, Math. Scand., 10 (1962), 119-126.

[11] M.M. KAPRANOV, The permutoassociahedron, MacLane's coherence theorem and asymptotic zones for KZ equation, Journal of Pure and Applied Algebra, 85 (1993), 119-142.

[12] T. KASHIWABARA, On the Homotopy Type of Configuration Complexes, Contemporary Math., 146 (1993), 159-170.

[13] J.P. MAY, The Geometry of iterated loop spaces, Lecture Notes in Math., 277, Springer Verlag (1972).

[14] J.P. MAY, E_∞-spaces, group completions and permutative categories, London Math. Soc. Lecture Notes, 11 (1974), 61-94.

[15] R.J. MILGRAM, Iterated loop spaces, Annals of Math., 84 (1966), 386-403.

[16] D. QUILLEN, Higher algebraic K-theory I, Lecture Notes in Math., 341, Springer Verlag (1973), 85-147.

[17] G. SEGAL, Configuration spaces and iterated loop spaces, Inventiones Math., 21 (1973), 213-221.

[18] J.H. SMITH, Simplicial Group Models for $\Omega^n S^n X$, Israel Journal of Math., 66 (1989), 330-350.

Manuscrit reçu le 19 septembre 1995,
accepté le 22 janvier 1996.

Clemens BERGER,
Université de Nice-Sophia Antipolis
Laboratoire J.A. Dieudonné
Parc Valrose
06108 Nice Cedex 2 (France).
cberger@math.unice.fr