

Examen (Seconde session)

Durée : 1 heure

Tous les documents et matériels électroniques sont interdits. Le barème est indicatif (notation sur 10 points).

Exercice 1 [2 points] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

1. Rappeler la définition (avec des quantificateurs) de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
2. En utilisant la définition précédente, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + 3x^2 = 1$.

Exercice 2 [1 point] Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{x^2+1}, \quad g(x) = (\sin(x))^2.$$

Exercice 3 [2 points] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2 \sin(x) - e^{\cos(x)}$. Montrer qu'il existe $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $f(a) = 0$.

Exercice 4 [2 points] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = xe^x$ si $x < 0$ et $f(x) = 1 - \cos(x)$ si $x \geq 0$.

1. Cette fonction est-elle continue en $x = 0$?
2. Est-elle dérivable en $x = 0$?

Pour chacune des questions précédentes, vous justifierez soigneusement votre réponse.

Exercice 5 [2 points] Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx.$$

Exercice 6 [2 points]

1. Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 des fonctions \cos et \exp .
2. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{e^x - \cos(x)}{x^2}.$$