Corrigé L1 17 analyse Session 2 juin 2011 N° ....

Ex1 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ ssi $\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, \forall x \in]-\eta,\eta[, f(x) \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$

ou encore ssi : $\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, \forall x \in \mathbb{R}, |x|<\eta \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$

2. On veut montrer $\lim\limits_{x\to 0} 1+3x^2 = 1$. Soit $\varepsilon>0$ on cherche $\eta>0$ tq $\forall x$, $|x|<\eta \Rightarrow |1+3x^2-1|<\varepsilon$

Or $|3x^2|<\varepsilon \Leftrightarrow x^2 < \frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$. On peut donc prendre $\eta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$

Ex2 : $f(x) = \exp(x^2+1)$. On connait $\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$ et $\frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x$. La dérivée d'une composée donne $f'(x) = 2x\exp(x^2+1)$

$g(x) = (\sin(x))^2$ g est la composée $x \mapsto \sin x \mapsto (\sin(x))^2$ $g'(x) = 2\cos(x)\sin(x)$

Ex3 : $f(x) = 2\sin(x) - \exp(\cos(x))$. On veut montrer $\exists a \in]0,\frac{\pi}{2}[$ tq $f(a)=0$

On ne sait pas résoudre l'équation $\exp(\cos(x)) = 2\sin(x)$. Comme f est continue (f est obtenue par somme et composée de fonctions continues) on va appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

$f(0) = -\exp(1) = -e < 0$; $f(\frac{\pi}{2}) = 2 - \exp(0) = 2-1 = 1 > 0$. Comme $[0,\frac{\pi}{2}]$ est un intervalle et f est continue, $\exists a \in]0,\frac{\pi}{2}[$ tq $f(a)=0$

Ex4 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xe^x$ si $x<0$, $x \mapsto 1-\cos(x)$ si $x \geq 0$ 1. f est continue en 0 si les limites $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ existent et valent $f(0) = 1-\cos(0) = 0$

$x \mapsto xe^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} xe^x$ existe et vaut $0 \times e^0 = 0 = f(0)$

$x \mapsto 1-\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1-\cos(x)$ existe et vaut $1-\cos(0) = 0 = f(0)$

Conclusion : f est continue en 0

2. f est dérivable en 0 si la limite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ existe dans $\mathbb{R}$

Pour $x<0$ $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{xe^x}{x} = e^x$. $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^x = e^0 = 1$

Pour $x>0$ $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1-\cos(x)}{x}$. On reconnait l'opposé du taux d'accroissement de la fonction cos en 0

or cos est dérivable en 0 et $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$. donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$. (On peut aussi bien utiliser un DL de la fonction cos en 0)

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ donc f n'est pas dérivable en 0

Ex5. $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{(u(x))^2}dx$ avec $u(x) = 1+x^2$. $\frac{u'(x)}{u(x)^2}$ est la dérivée de $\frac{-1}{u(x)}$, pourvu que $u(x)$ ne s'annule pas. $x \mapsto 1+x^2$ est continûment dérivable sur $[0,1]$ et ne s'annule pas

donc $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = +\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1+x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$I_2 = \int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx$. On fait une intégration par partie $u(x) = x$, $v'(x) = \sin(x)$ $\Rightarrow u'(x) = 1$, $v(x) = -\cos x$

$\int_0^{\pi/2} x\sin x\, dx = [-x\cos x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos x\, dx = 0 + [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$

Ex6 1. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \to 0}(x^2)$ (développement de Taylor)

$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \to 0}(x^2)$ "

2. On utilise le DL à l'ordre 2 ~~en~~ 0 de $e^x - \cos(x)$ avec les DL donnés en (1) $e^x - \cos(x) = x + x^2 + o_{x \to 0}(x^2)$

donc pour $x \neq 0$ on a $\frac{e^x - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{x} + 1 + o_{x \to 0}(1)$.

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} 1 + o_{x \to 0}(1) = 1$; $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{x}$ n'existe pas donc $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x - \cos(x)}{x^2}$ n'existe pas.