L1 SF Analyse — Interrogation 1 — 15 oct. 2015

Nom : Prénom :

Ex. Montrer que l'application $\begin{array}{rcl}[0,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{1+x^2}\end{array}$ est injective. Pouvez vous donner une expression pour la fonction réciproque ?

Pour $x,y \geq 0$ on a $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+y^2} \Rightarrow 1+x^2 = 1+y^2 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ (car $x,y \geq 0$)

$y = \sqrt{1+x^2} \iff y \geq 0$ et $y^2 = 1+x^2 \iff y \geq 0$ et $x^2 = y^2-1 \iff y \geq 0$ et $\left(x = \sqrt{y^2-1} \text{ ou } x = -\sqrt{y^2-1}\right)$

si on veut $x \geq 0$ alors $x = \sqrt{y^2-1}$ (bien défini si et seulement si $y^2-1 \geq 0$ donc si $y \geq 1$ ($y \leq -1$ est exclu))

d'où l'application réciproque $\begin{array}{rcl}[1,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{x^2-1}\end{array}$

Ex Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sqrt{1+n^2}$.

Formaliser "(u_n) est majorée" puis donner la négation formelle de cet énoncé

$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$

négation : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M$

on peut remplacer u_n par son expression $\sqrt{1+n^2}$

Quel est l'énoncé formel traduisant "(u_n) tend vers $+\infty$" ?

$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \geq M$ ou de façon plus synthétique $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq M$

on peut remplacer u_n par son expression $\sqrt{1+n^2}$

Montrer en revenant à l'énoncé formel plus haut que (u_n) n'est pas majorée. Cela suffit il pour conclure que (u_n) tend vers $+\infty$? Si non, quel argument permet de conclure ?

On veut montrer $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ \sqrt{1+n^2} > M$

Soit $M \in \mathbb{R}$ si $M < 0$, tout $n \in \mathbb{N}$ vérifie $\sqrt{1+n^2} > M$

si $M \geq 0$ alors $\sqrt{1+n^2} > M \iff 1+n^2 > M^2 \iff n^2 > M^2-1 \iff n > \sqrt{M^2-1}$ ($n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$)

tout entier strict^t supérieur à $\sqrt{M^2-1}$ convient

L'observation (u_n) non majorée ne suffit pas pour conclure $u_n \to +\infty$, mais il suffit d'observer de plus que (u_n) est croissante

et en effet $(u_{n+1})^2 = 1+(n+1)^2 = 1+n^2+2n+1 = u_n^2+2n+1 > u_n^2$ donc $u_{n+1} > u_n$

$(u_n, u_{n+1} \geq 0)$

Ex Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1/2$ et la relation $u_{n+1} = u_n^2$

Montrer $\forall n,\ u_n \leq (u_0)^n$ Qu'en déduit on pour la limite de (u_n) ?

On observe d'abord $\forall n\ u_n \geq 0$: c'est vrai pour $n=0$ et pour $n>0$ $u_n = (u_{n-1})^2 \geq 0$

On montre ensuite par récurrence sur n $u_n \leq (u_0)^n$: c'est vrai pour $n=0$: $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

supposons le résultat vrai pour n alors $u_{n+1} = u_n^2 \leq \left((u_0)^n\right)^2$ car $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$

Or $(u_0{}^n)^2 = u_0{}^{2n} = u_0{}^{n+1} \times u_0{}^{2n-(n+1)} = u_0{}^{n+1}\ u_0{}^{n-1}$

si $n \geq 1$ alors $u_0{}^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 1$ donc $u_0{}^{n+1}\ u_0{}^{n-1} \leq u_0{}^{n+1}$ $(u_0{}^{n+1} \geq 0)$

si $n=0$ on vérifie directement $u_1 = u_0^2 \leq u_0$ car $0 \leq u_0 \leq 1$

$u_0{}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ car $|u_0| < 1$. $0 \leq u_n \leq (u_0)^n$, par le théorème "des gendarmes" $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$