Licence 3 – TD Algèbre et arithmétique – 2007-08

Un corrigé de l'exercice 6 de la feuille 3

On assimile une bague à un polygone régulier à dix côtés (dont on fixe la longueur à 1) plongé dans $\mathbb{R}^3$, chaque côté ayant une couleur choisie parmi trois. On reconnaît la même bague dans deux tels polygones coloriés s'il existe un déplacement de $\mathbb{R}^3$ (une isométrie affine dont le déterminant de la partie linéaire est positif) transformant l'un en l'autre. Cette modélisation acquise, les affirmations qui suivent sont des "énoncés mathématiques" : on a le choix entre chercher à les prouver, les réfuter par un contre exemple ou en prouver la négation, ou les déclarer conjecturaux si on ne sait faire ni l'un ni l'autre.

1. Fixons un polygone régulier P à dix côtés de longueur 1 dans $\mathbb{R}^3$. Les polygones coloriés que nous considérons sont chacun l'image par un déplacement d'un polygone colorié dont le support est P. Deux polygones coloriés de support P représente la même bague s'il existe un déplacement laissant P invariant transformant l'un en l'autre. Le nombre de bagues est donc en bijection avec le nombre d'orbites pour l'action du sous-groupes des déplacements de $\mathbb{R}^3$ laissant P globalement invariant sur les polygones coloriés de support P.

2. On choisit deux sommets consécutifs A et B de P. Parmi les déplacements de $\mathbb{R}^3$ laissant P globalement invariant, on note :

– la rotation ρ d'axe la droite orthogonale à P passant par le centre de P et transformant A en B,

– la symétrie orthogonale τ par rapport à la droite passant par A et le sommet de P opposé.

On observe que le sous-groupe des déplacements de $\mathbb{R}^3$ laissant P globalement invariant est engendré par ρ et τ et qu'il est décrit par les seules relations

$$\rho^{10} = \mathrm{id}, \tau^2 = \mathrm{id}, \rho\tau = \tau\rho^{-1} \ .$$

On le notera $< \rho, \tau >$ dans la suite. On reconnaît le groupe diédrale D_{10}.

3. On numérote les côtés de P en assignant l'entier i au côté $\rho^{i-1}(AB)$, $1 \leq i \leq 10$. On numérote $1, 2, 3$ les trois couleurs disponibles. L'ensemble des polygones coloriés de support P est naturellement en bijection avec l'ensemble X des applications d'ensembles de $\{1, \ldots, 10\}$ dans $\{1, 2, 3\}$. Via cette bijection, le groupe $< \rho, \tau >$ agit sur X. Décrivons cette action : ρ et τ permutent les côtés du polygones P donc permutent leurs numéros. On en déduit un morphisme de groupes $< \rho, \tau > \to \Sigma_{10}$. L'image de ρ est la permutation cyclique $(1\ 2\ \ldots\ 10)$, celle de τ est le produit de transpositions disjointes $(1\ 10)(2\ 9)(3\ 8)(4\ 7)(5\ 6)$. le groupe des permutations de $\{1, \ldots, 10\}$ agit à gauche sur X via l'application

$$\Sigma_{10} \times X \to X, (\sigma, f) \mapsto f \circ \sigma^{-1} \ .$$

L'action de $< \rho, \tau >$ sur X est la composée $< \rho, \tau > \times X \to \Sigma_{10} \times X \to X$, où de façon équivalente la composée des morphismes de groupes $< \rho, \tau > \to \Sigma_{10} \to \Sigma(X)$. Explicitement l'image d'un élément f de X par ρ est la composée $f \circ (1\ 2\ \ldots\ 10)^{-1}$ et l'image de f par τ est la composée $f \circ (1\ 10)(2\ 9)(3\ 8)(4\ 7)(5\ 6)$.

4. On veut compter le nombre d'orbites de X pour l'action du groupe $< \rho, \tau >$. On utilise la formule de l'exercice 5 :

$$|X/ < \rho, \tau > | = \frac{1}{| < \rho, \tau > |} \sum_{g \in < \rho, \tau >} |X^g|$$

où $|Y|$ désigne le cardinal d'un ensemble Y et où X^g désigne l'ensemble des éléments de X fixes par g.

On sait donner la liste des éléments de $< \rho, \tau >$ (Cf l'exercice 4) :

$$< \rho, \tau > = \{\mathrm{id}, \rho, \ldots, \rho^9, \tau, \tau\rho, \ldots, \tau\rho^9\}$$

donc $| < \rho, \tau > | = 20$. On va dire des choses sur le cardinal de X^g.

5. Considérons les actions de $< \rho, \tau >$ sur $\{1, \ldots, 10\}$ et sur X décrites plus haut. Soit g un élément de $< \rho, \tau >$. On note $\{1, \ldots, 10\}/ < g >$ l'ensemble des orbites de $\{1, \ldots, 10\}$ pour l'action du sous-groupe de $< \rho, \tau >$ engendré par g. Alors l'ensemble des éléments de X fixes par g est en bijection avec l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, 10\}/ < g >$ dans $\{1, 2, 3\}$. En particulier on a

$$|X^g| = 3^{|\{1, \ldots, 10\}/ < g >|} \ .$$

../..

On est amené à décrire $|\{1,\ldots,10\}/<g>|$, g décrivant $<\rho,\tau>$

6. L'entier $|\{1,\ldots,10\}/<g>|$ ne dépend que de la classe de conjugaison du sous-groupe $<g>$ dans $<\rho,\tau>$.

En effet notons $<g>x$ l'orbite d'un élément $x \in \{1,\ldots,10\}$ pour l'action de $<g>$. Pour $h \in <\rho,\tau>$ l'application $\{1,\ldots,10\}/<g> \to \{1,\ldots,10\}/h<g>h^{-1}, <g>x \mapsto (h<g>h^{-1})(hx)$ est une bijection.

7. Les éléments $\rho, \rho^3, \rho^7, \rho^9$ engendre le même sous-groupe $<\rho>$ de $<\rho,\tau>$, lequel est distingué dans $<\rho,\tau>$ (puisque $\tau\rho\tau^{-1} = \tau\rho\tau = \rho^{-1}$). Le sous-groupe $<\rho>$ opère transitivement sur $\{1,\ldots,10\}$ donc

$$|X^{\rho}| = |X^{\rho^3}| = |X^{\rho^7}| = |X^{\rho^9}| = 3^1$$

d'après (5).

Les éléments $\rho^2, \rho^4, \rho^6, \rho^8$ engendre le même sous-groupe $<\rho^2>$ lequel est distingué dans $<\rho,\tau>$. L'ensemble $\{1,\ldots,10\}$ est la réunion de deux orbites pour l'action de $<\rho^2>$: $\{1,3,5,7,9\}$ et $\{2,4,6,8,10\}$. On en déduit

$$|X^{\rho^k}| = 3^2 \text{ pour } k = 2,4,6,8.$$

L'élément ρ^5 engendre le sous-groupe centrale $<\rho^5>$ de $<\rho,\tau>$. L'ensemble $\{1,\ldots,10\}$ est la réunion de 5 orbites pour l'action de $<\rho^5>$: $\{1,6\},\{2,7\},\{3,8\},\{4,9\},\{5,10\}$. On en déduit

$$|X^{\rho^5}| = 3^5 \ .$$

L'élément id opère bien sûr trivialement sur $\{1,\ldots,10\}$ et on trouve 10 orbites, d'où

$$|X^{\mathrm{id}}| = 3^{10} \ .$$

L'ensemble $\{1,\ldots,10\}$ est la réunion de 5 orbites pour l'action de $<\tau>$: $\{1,10\},\{2,9\},\{3,8\},\{4,7\},\{5,6\}$ On a $\rho\tau = \tau\rho^{-1}$ donc $\rho^k\tau\rho^{-k} = \tau\rho^{-2k}$. Ainsi les éléments $\tau\rho^k$, k décrivant $\{0,2,4,6,8\}$, sont conjugués. On obtient

$$|X^{\tau\rho^k}| = 3^5 \text{ pour } k = 0,2,4,6,8.$$

De même $\{1,\ldots,10\}$ est la réunion de 6 orbites pour l'action de $<\tau\rho>$: $\{1,9\},\{2,8\},\{3,7\},\{4,6\},\{5\}$ et $\{10\}$. On a $\rho^k(\tau\rho)\rho^{-k} = \tau\rho^{1-2k}$ donc les éléments $\tau\rho^k$, k décrivant $\{1,3,5,7,9\}$, sont conjugués. On obtient

$$|X^{\tau\rho^k}| = 3^6 \text{ pour } k = 1,3,5,7,9.$$

8. En rassemblant les morceaux on obtient que le nombre d'orbites de X sous l'action de $<\rho,\tau>$ est

$$\frac{1}{20}(4*3 + 4*3^2 + 3^5 + 3^{10} + 5*3^5 + 5*3^6) = 3210$$

à comparer à $|X| = 3^{10} = 59049$.

9. Remarque : Si on compte le nombre de polygones coloriés de support P à rotation près, c'est à dire le nombre d'orbites de X sous l'action de $<\rho>$, on trouve $\frac{1}{10}(4*3 + 4*3^2 + 3^5 + 3^{10}) = 5934$.

François-Xavier Dehon, Université de Nice Sophia-Antipolis, Laboratoire J.A. Dieudonné
dehon@unice.fr