1.a -2 a pour partie réelle -2, pour partie imaginaire 0, pour module 2 et pour argument π $[2\pi]$: $-2 = 2e^{i\pi}$.

1.b Calculer $(-1+i\sqrt{3})^{12}$
On calcule d'abord
$|-1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$ et
$\mathrm{Arg}(-1+i\sqrt{3}) = \mathrm{Arg}(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$.
D'où $-1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $(-1+i\sqrt{3})^{12} = 2^{12}e^{i\frac{12\times 2\pi}{3}} = 4096$ de partie réel 4096, de partie imaginaire nulle, etc.

2.a ii) $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ a deux racines carrées complexes : $2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{9\pi}{8}} = -2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}}$.
On peut exprimer $e^{i\frac{\pi}{8}}$ avec des radicaux :
$2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et on sait $\cos\frac{\pi}{8} \geq 0$ car $0 \leq \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}}$.
De même $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8} \geq 0$ donc $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}$.
On obtient $e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}} + i\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}$.

Le nombre complexe $3(2i-1)$ a pour module $3\sqrt{5}$ et un argument α dont on connait l'existence mais qu'on ne sait pas calculer. Il a deux racines carrées complexes opposées : $3^{\frac{1}{2}}5^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $-3^{\frac{1}{2}}5^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\alpha}{2}}$. On peut cependant exprimer comme précédemment ses racines carrées avec des radicaux :
On cherche a et b réels tels que $(a+ib)^2 = -3+6i$. En développant on obtient
$a^2 - b^2 = -3$ et $2ab = 6$ soit $ab = 3$.
Les solutions éventuelles pour a et b sont non nulles puisque le produit ab est non nul. On écrit alors $b = \frac{3}{a}$ et en remplaçant dans la première équation on obtient
$a^2 - \frac{9}{a^2} = -3$ soit $a^4 + 3a^2 - 9 = 0$.
On reconnait un trinôme du second degré en a^2. Ce trinôme a deux racines réelles $-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{45}}{2}$.
Seule la solution positive $-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{45}}{2} = \frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)$ est une solution pour a^2, d'où $a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)}$, $b = \frac{3}{a}$ (b est également une racine carrée de $3+a^2$ ce qui permet de normaliser son écriture).
On obtient deux racines carrées complexes opposées de $-3+6i$: $\sqrt{\frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)} + i\sqrt{\frac{3}{2}(\sqrt{5}+1)}$ et $-\sqrt{\frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)} - i\sqrt{\frac{3}{2}(\sqrt{5}+1)}$.

Extra c $\cos\frac{2\pi}{5}$ est la partie réelle de $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ qui est une racine du polynôme $z^5 - 1$. Les autres racines sont $e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{-i\frac{4\pi}{5}}$, $e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{-i\frac{2\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{10\pi}{5}} = 1$. On peut alors écrire

$$z^5 - 1 = (z-1)(z-e^{i\frac{2\pi}{5}})(z-e^{i\frac{4\pi}{5}})(z-e^{-i\frac{4\pi}{5}})(z-e^{-i\frac{2\pi}{5}})\ .$$

En comparant le membre de gauche avec le membre de droite développé on voit que la somme $1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}$, qui est le coefficient de z dans le polynôme, est nulle. En particulier sa partie réelle est nulle soit

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0\ .$$

On observe ensuite $\cos\frac{4\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$ donc $\cos\frac{2\pi}{5}$ est racine du trinôme du second degré $4x^2 + 2x - 1$.
On conclut en notant que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est positif ($0 \leq \frac{2\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$) donc $\cos\frac{2\pi}{5} = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$.