1.a Une fraction $\frac{a}{b}$, avec a et b nombres réels, représente un nombre réel si et seulement si le dénominateur b est non nul. Ainsi $\frac{1}{\cos(\pi)}$ représente un nombre réel mais pas $\frac{1}{\sin(\pi)}$ ni $\frac{1}{1-\log^4 e}$. De même $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ n'est pas défini pour $x = \pi/2$ modulo π.

1.b Règle : pour a un nombre réel, l'expression a^b représente le réel 1 lorsque b est l'entier nul, le produit de a b-fois par lui même lorsque b est un entier strictement positif, le réel $\frac{1}{a^{-b}}$ lorsque b est un entier strictement négatif et a est non nul, l'unique réel x tel que $x^n = a$ lorsque $b = \frac{1}{n}$ avec n entier positif impair, l'unique réel positif x tel que $x^n = a$ lorsque $b = \frac{1}{n}$ avec n entier strictement positif pair et a est positif, le réel $(a^{\frac{1}{q}})^p$ lorsque $b = \frac{p}{q}$ avec q entier strictement positif et p entier non nul premier à q et $a^{\frac{1}{q}}$ est défini, enfin le réel $\mathrm{e}^{b \log a}$ lorsque b est réel et a est strictement positif.

$(\log x)^{\sin \pi} = (\log x)^0$ représente un nombre réel dès que $\log x$ est défini, donc pour $x = 1$ mais pas pour $x = -1$. $(\cos \pi)^{\frac{x}{2}}$ n'est pas défini pour $x = 1$ ou -1 : $\cos \pi$ est strictement négatif. $(x\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$ est défini pour $x = 1$ mais pas pour $x = -1$.

2.a $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ représente l'entier $\frac{p!}{(p-q)!\,q!}$ lorsque p et q sont des entiers positifs avec $q \leq p$ (par convention $0!$ représente l'entier 1). Ainsi $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 70$.

$7 + 8 + \cdots + 100 = \frac{1}{2}(7 + 100) \times 94 = 5029$ (somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique).

$3 + 3^2 + \cdots + 3^9 = 3\frac{1-3^9}{1-3} = 29523$ (somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique).

2.b $(2 + \sqrt{3})^{-2} = \frac{1}{7+4\sqrt{3}} = \frac{7-4\sqrt{3}}{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} = 7 - 4\sqrt{3}$

$x^{\cos 3}$ est de la forme x^α avec $\alpha < 0$ ($x \mapsto \cos x$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$; $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ implique $-1 < \cos 3 < 0$) donc $x^{\cos 3}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

$\frac{(1{,}01)^n}{n^{10000}}$ est de la forme $\frac{\mathrm{e}^{\alpha n}}{n^\beta}$ avec $\alpha = \log 1{,}01 > 0$ (la fonction log est strictement croissante sur $]0, +\infty[$) donc $\frac{(1{,}01)^n}{n^{10000}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

2.c On écrit par exemple $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ puis $\sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

3.a $20121_3 = 1 + 2 \times 3 + 3^2 + 2 \times 3^4 = 178$

$2728 = 3 \times 909 + 1 = 3^3(3^2 \times 11 + 2) + 1 = 3^3(3^2(3^2 + 2) + 2) + 1 = 10202001_3$

3.b
$$\begin{aligned}
\frac{127}{13} &= 9 + \frac{10}{13} \\
&= 9 + \frac{1}{10}\left(\frac{100}{13}\right) = 9 + \frac{1}{10}\left(7 + \frac{9}{13}\right) \\
&= 9{,}7 + \frac{1}{100}\left(\frac{90}{13}\right) = 9{,}7 + \frac{1}{100}\left(6 + \frac{12}{13}\right) \\
&= 9{,}76 + \frac{1}{10^3}\left(9 + \frac{3}{13}\right) \\
&= 9{,}769 + \frac{1}{10^4}\left(2 + \frac{4}{13}\right) \\
&= 9{,}7692 + \frac{1}{10^5}\left(3 + \frac{1}{13}\right) = 9{,}769230 + \frac{1}{10^6}\left(\frac{10}{13}\right) \\
&= 9{,}\overline{769230}\ldots
\end{aligned}$$

$2,01\overline{21}\cdots = \frac{201}{100} + \frac{1}{100}0,\overline{21}\ldots.$
Posons $a = 0,\overline{21}\ldots$; $100a = 21 + a$ donc $a = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$. On obtient $2,01\overline{21}\cdots = \frac{201}{100} + \frac{7}{100\times 33} = \frac{332}{165}$.
Observons également $2,01\overline{21}\cdots = 2,0\overline{12}\cdots = 2 + \frac{1}{10}\frac{12}{99}$ etc.

3.d $\frac{\pi}{81} = (\frac{180}{81})^{\text{o}} = 2^{\text{o}} + (\frac{2}{9})^{\text{o}} = 2^{\text{o}} + (\frac{120}{9})' = 2^{\text{o}} + 13' + (\frac{1}{3})' = 2^{\text{o}} + 13' + 20''$.
$\frac{1}{9}(7\text{h}\,52\text{mn}\,24\text{s}) = \frac{7\times 60}{9}\text{mn} + \frac{52}{9}\text{mn} + \frac{8}{3}\text{s} = 46\text{mn} + \frac{2\times 60}{3}\text{s} + 5\text{mn} + \frac{7\times 60}{9}\text{s} + \frac{8}{3}\text{s} = 51\text{mn} + 40\text{s} + 46\text{s} + \frac{2}{3}\text{s} + 2\text{s} + \frac{2}{3}\text{s} = 52\text{mn} + 29\text{s} + \frac{1}{3}\text{s}$.