Nom : **Prénom :**

L2 - TD MMAG gp 2 **Interrogation - sujet B** **7 novembre 2019**

Durée prévue : 40mn. Documents et appareils électroniques interdits

Chaque réponse doit être raisonnablement justifiée

Ex. 1. Soient f, g les applications linéaires définies par

$f(x,y) = (x-y, 3x+y, x+y)$ et

$g(x,y,z) = (x-3y+3z, x+y-z)$

1+1 Déterminer les matrices de f et g dans les bases canoniques.

2+1 L'application $g \circ f$ est elle bijective ? Donner une base de $\mathrm{Im}(g \circ f)$. ($g \circ f$ désigne l'application $u \mapsto g(f(u))$.)

2+1 L'application $f \circ g$ est elle bijective ? Donner une base de $\mathrm{Im}(f \circ g)$.

Ex. 2. Soit f l'application $\mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2$, $P \mapsto (P(-1), P(1))$, où $\mathbb{R}_3[X]$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$.

2 Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ (exprimée comme famille de polynômes).

1 L'application f est elle surjective ?

1 Trouver P tel que $f(P) = (1,2)$ (On pourra considérer les combinaisons linéaires de $X-1$ et $X+1$ mais ce n'est pas obligé.)

1. $M = \mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

alors $\mathrm{Mat}(g \circ f) = NM = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\det(NM) = 5+3 \neq 0$ donc NM est inversible donc $g \circ f$ est bijective

$\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Vect}((-5,3),(-1,-1)) \subset \mathbb{R}^2$. $(-5,3)$ et $(-1,-1)$ sont non proportionnels donc forment une base de $\mathrm{Vect}((-5,3),(-1,-1))$ [donc ce dernier est de dimension 2 donc égal à $\mathbb{R}^2$ et $g \circ f$ est surjective.
Par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(g \circ f) = 2-2 = 0$ donc $g \circ f$ est injective donc bijective]

$\mathrm{Mat}(f \circ g) = MN = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & 8 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. La 3ème colonne est l'opposée de la 2ème et est non proportionnelle à la 1ère

donc $(0,4,2)$ et $(4,8,2)$ forment une base de $\mathrm{Im}(f \circ g)$ et $\dim \mathrm{Im}(f \circ g) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$: $f \circ g$ n'est pas surjective donc pas bijective.

2. $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2$, $P \mapsto (P(-1), P(1))$. $\mathrm{Ker} f$?

Rq L'algèbre des polynômes dit $\mathrm{Ker} f = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ (X+1)(X-1) \text{ divise } P\} = \{(X+1)(X-1)Q,\ d°Q = 1\}$
$= \{(X+1)(X-1)(aX+b),\ a,b \in \mathbb{R}\}$ de dim 2

de base $((X+1)(X-1), (X+1)(X-1)X)$

Sans l'algèbre des polynômes on représente P par ses coefficients (=ses coordonnées dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$)

$P = a + bX + cX^2 + dX^3$. $P(-1) = 0 \Leftrightarrow a - b + c - d = 0$, $P(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c + d = 0$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_1 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} a - b + c - d = 0 \\ 2a + 2c = 0 \end{cases}$$ d'où $\begin{matrix} c = -a \\ d = -b \end{matrix}$ d'où le paramétrage des solutions $\{(a, b, -a, -b),\ a, b \in \mathbb{R}\}$

et la base (P_1, P_2) avec $a = 1, b = 0$ pour $P_1 \leadsto P_1 = 1 - X^2$, $a = 0$ et $b = 1$ pour $P_2 \leadsto P_2 = X - X^3$

D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}_3[X] - \dim \ker f = 4 - 2 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ donc f est surjective

Cherchons P de la forme $a(X-1) + b(X+1)$ tq $P(-1) = 1$ et $P(1) = 2$

alors $a(-1-1) = 1 \leadsto a = -\frac{1}{2}$

$b(1+1) = 2 \leadsto b = 1$

On a donc $f\left(-\frac{1}{2}(X-1) + (X+1)\right) = (1, 2)$. $-\frac{1}{2}(X-1) + (X+1)$ n'est pas la seule solution : on peut lui ajouter tout élément de $\ker f$ c'est à dire toute combinaison linéaire de $1 - X^2$ et $X - X^3$

Autre méthode : on résoud $\begin{cases} a - b + c - d = 1 \\ a + b + c + d = 2 \end{cases}$ ce qui revient à $\begin{matrix} L_1 + L_2 : 2(a+c) = 3 \\ L_2 - L_1 : 2(b+d) = 1 \end{matrix}$

d'où une solution : $a = \frac{3}{2}, c = 0, b = \frac{1}{2}, d = 0$ $P = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}X$