L2 MMAG

F4 ex 3 $\quad (x_i, y_i)_{1\leq i\leq 4} = \big((-1,2), (0,0), (0,1), (1,2)\big)$

b) Meilleure approximation de y_i par $ax_i + b$; a, b à déterminer $\rightsquigarrow$ Meilleure réponse à l'équation

$$M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ solution de l'équation ${}^tMM\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = {}^tM\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$${}^tMM = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \big(\langle c_i, c_j \rangle\big)_{i,j}$$ où c_1, c_2 sont les deux colonnes de M

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

${}^tM\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. L'équation est donc $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} 2a = 0 \\ 4b = 5 \end{cases}$ $\quad a = 0$ et $b = 5/4$

2b) Meilleure approximation par une parabole : meilleure approximation de y_i par $ax_i^2 + bx_i + c$; a, b, c à déterminer $\rightsquigarrow$ Meilleure réponse à l'équation $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Réponse : (a, b, c) solution de l'équation ${}^tMM\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = {}^tM\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \ldots$

Rq en 1b l'erreur commise est $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(2-\frac{5}{4})^2 + (0-\frac{5}{4})^2 + (1-\frac{5}{4})^2 + (2-\frac{5}{4})^2} \neq \frac{\sqrt{44}}{2} = \sqrt{11}$

en 2b l'erreur commise est $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| = \ldots$