Nom : **Prénom :**

L3 MATH - TD Calcul intégral gp M-MI Interrogation 11 décembre 2019

Durée prévue : 30mn. Documents et appareils électroniques interdits

Chaque réponse doit être raisonnablement justifiée

Ex. 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction partout dérivable. Pour $a > 0$ on note $\tau_a f$ l'application $x \mapsto \frac{f(x+a)-f(x)}{a}$.

2 Montrer que pour chaque $a > 0$ l'application $\tau_a f$ est mesurable (pour la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$).

2 En déduire que f' (la dérivée de f) est mesurable.

2 **Ex. 2.** Montrer qu'on a $\log(1+x) \geq x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$. En déduire (soigneusement) :

$\leq$

1 : sin ↗ sur ...

1 . $\log(1+x) \leq$ ...

1 : calcul intégral

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(\log(1+x))dx \leq \frac{1}{2}$$

2 Obtient on une majoration plus fine avec l'inégalité $\log(1+x) \leq \log(1+\pi/3) + \frac{1}{1+\pi/3}(x - \pi/3)$?

1 Comment obtiendrait on une minoration fine de l'intégrale ?

Cf f4 ex7 pour l'ex 1, f5 ex7 pour l'ex 2

1. Pour chaque $a>0$ $\tau_a f$ est continue puisque f est continue (dérivable implique continue). ~~Ma~~ Or une application continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable pour la tribu des boréliens.

Par définition f' est la limite simple de la famille de fonctions $(\tau_a f)$ quand a tend vers 0, ou la limite simple de la suite de fonctions $(\tau_{1/n} f)$ ~~quand n~~. Une limite simple de fonctions mesurables est mesurable donc f' est mesurable.

2. ~~a)~~ Posons $f(x) = \log(1+x) - x$. On a $f(0) = 0$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$ >0 si $x \in]-1, 0[$ et <0 si $x \in]0, +\infty[$, d'où le tableau de variation :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	↗	0	↘

sur lequel on lit $f(x) \leq 0$ sur $]-1, +\infty[$

On peut aussi invoquer la concavité de $x \mapsto \log(1+x)$ (la dérivée seconde est <0 sur $]-1, +\infty[$) qui fait que le graphe de $x \mapsto \log(1+x)$ est sous sa tangente en 0, laquelle est le graphe de $x \mapsto x$

La fonction sin est croissante sur $[0, \pi/2]$ ~~donc $\sin(\log(1+x)) \leq \sin(x)$~~

Or pour $x \in [\pi/3, \pi/2]$ on a $0 \leq \log(1+x) \leq x \leq \pi/2$ donc $\sin(\log(1+x)) \leq \sin(x)$

Par positivité de l'intégrale $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(\log(1+x))\,dx \leq \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(x)\,dx$

$$= [-\cos x]_{\pi/3}^{\pi/2} = \cos(\pi/3) - \cos(\pi/2) = \frac{1}{2}$$

b) $x \mapsto \log(1+\pi/3) + \frac{1}{1+\pi/3}(x - \pi/3)$ est le paramétrage de la tangente à $x \mapsto \log(1+x)$ en $\pi/3$. Par concavité de cette dernière on a

$\log(1+x) \leq \log(1+\pi/3) + \frac{1}{1+\pi/3}(x-\pi/3) \leq x$ sur $[\pi/3, +\infty[$ d'où comme précédemment $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(\log(1+x))\,dx \leq \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin\left(\log(1+\pi/3) + \frac{1}{1+\pi/3}(x-\pi/3)\right)dx$

(faire un dessin)

$\leq \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(x)\,dx$

L'intégrale du milieu se calcule comme celle à sa droite : $\left[-\left(1+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\log\left(1+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{1+\frac{\pi}{3}}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]_{\pi/3}^{\pi/2}$. En donner une approximation rationnelle ou la majorer directement par $1/2$ est faisable mais technique.

c) Minoration fine de $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(\log(1+x))\,dx$

On a $\log(1+x) \geqslant \log\left(1+\frac{\pi}{3}\right)$ sur $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ parce que log est croissante. Pour composer avec sin on s'assure que les valeurs des deux expression sont dans un même intervalle où sin est croissante. Et en effet $\frac{\pi}{2} \geqslant x \geqslant \log(1+x) \geqslant \log\left(1+\frac{\pi}{3}\right) \geqslant \log(1) = 0$ sur $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$
donc $\sin(\log(1+x)) \geqslant \sin\left(\log\left(1+\frac{\pi}{3}\right)\right)$ sur $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ puis $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(\log(1+x))\,dx \geqslant \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin\left(\log\left(1+\frac{\pi}{3}\right)\right)dx = \left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\log\left(1+\frac{\pi}{3}\right)\right)$
On peut utiliser un développement ~~d~~ en série pour obtenir une approximation rationnelle de ce minorant, ou bien : $\displaystyle\log\left(1+\frac{\pi}{3}\right) = \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1+x}$
$\displaystyle\geqslant \frac{\pi}{3}\,\frac{1}{1+\frac{\pi}{3}}$

Autres minorations : $\log(1+x) \geqslant x\,\dfrac{\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}{\pi/2}$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par concavité de $x \mapsto \log(1+x)$ (faire un dessin)

en vérifiant bien $\frac{\pi}{2} \geqslant \log(1+x) \geqslant x\,\dfrac{\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}{\pi/2} \geqslant 0$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on obtient $\sin(\log(1+x)) \geqslant \sin\left(x\,\dfrac{\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}{\pi/2}\right)$ pour x sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ puis
$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(\log(1+x))\,dx \geqslant \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin\left(x\,\frac{\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}{\pi/2}\right)dx = \left[-\frac{\pi/2}{\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}\cos\left(x\,\frac{\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}{\pi/2}\right)\right]_{\pi/3}^{\pi/2}$$

Rq On peut calculer une primitive de $x \mapsto$ ~~log~~ $\sin(\log(1+x))$ par le changement de variable $u = \log(1+x)$
$du = \dfrac{dx}{1+x} = e^{-u}dx$
$$\int^x \sin(\log(1+t))\,dt = \int^{\log(1+x)} \sin(u)\,e^u\,du$$ puis $\sin(u)\,e^u = \mathrm{Im}\left(\exp((1+i)u)\right)\ldots$