Nom : **Prénom :**

L3 MATH - TD Calcul intégral gp M-MI **Interrogation** **9 octobre 2019**

Durée prévue : 30mn. Documents et appareils électroniques interdits

Chaque réponse doit être raisonnafifefi ent justiée

Ex. 1. Calculer

$$\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x} dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\mathrm{e}} x^2 \ln(x) dx \ .$$

Ex. 2. Comparer

$$I_n = \int_0^n \sqrt{x} dx \quad \text{avec} \quad S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \ .$$

(Faites un dessin). Qu'en déduit on sur

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n\sqrt{n}} \ ?$$

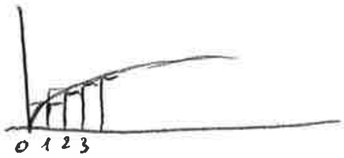
Ex. 3. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} \ .$$

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2x e^{-x} dx = \left[-x^2e^{-x}\right]_0^{+\infty} - \left[2x e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-x} dx$ — 1 pour IPP

$\displaystyle = \underbrace{\left[-x^2e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{0} - \underbrace{\left[2x e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{0} + \underbrace{\left[-2e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{2} = 2$ — 1 pour résultat

$\displaystyle\int_0^e x^2 \ln(x) dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_0^e - \int_0^e \frac{x^3}{3x} dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_0^e - \left[\frac{x^3}{9}\right]_0^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} = \frac{2}{3}e^3$ — idem

2. 

$\displaystyle\sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{x}\, dx \leq \sqrt{k+1}$ — 1 pour dessin

$\displaystyle\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^n = \int_0^n \sqrt{x}\, dx \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^{n+1}$

$\displaystyle\frac{2}{3} n\sqrt{n} \leq S_n \leq \frac{2}{3}(n+1)^{3/2} - \frac{2}{3}$ — 1

$\displaystyle\frac{2}{3} \leq \frac{S_n}{n\sqrt{n}} \leq \frac{2}{3}\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/2}}_{\to 1} - \frac{2}{3}\underbrace{\frac{1}{n\sqrt{n}}}_{\to 0}$ donc $\displaystyle\frac{S_n}{n\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3}$ — 1

3. $\displaystyle u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+1/n} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $\displaystyle f(x) = \frac{1}{1+x}$ — 1

$\displaystyle\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln(2)$ — 1

$\displaystyle v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+k/n} = \frac{2}{2n}\sum_{k=1}^{2n} g\left(\frac{k}{2n}\right)$ avec $\displaystyle g(x) = \frac{1}{1+2x}$ — 1

$\displaystyle\xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\int_0^1 g = \left[\ln(1+2x)\right]_0^1 = \ln(3)$ — 1

Egalement $\displaystyle v_n = \frac{2}{2n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(2\frac{k}{2n}\right) \longrightarrow \int_0^2 f = \ln(3)$ ou encore $\displaystyle v_n = u_n + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{1+k/n} = \underbrace{u_n}_{\to \ln(2)} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+k/n}}_{\to \int_0^1 \frac{dx}{2+x} = \ln(3)-\ln(2)}$