## Partiel du 4 novembre 2019

Barème indicatif : exercice 1 : 4 points, exercice 2 : 4 point, exercice 3 : 5 points, exercice 4 : 2 point, exercice 5 : 5 points.

**Exercice 1.** Question de cours.

1. Donner la définition d'une tribu sur un ensemble $E$.
2. Donner la définition d'une mesure sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.
3. Donner un exemple simple de tribu sur $\{1, 2, 3, 4\}$.
4. Donner un exemple de mesure sur $\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$.

**Exercice 2.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ on définit

$$J(n) = \{x \in ]a, b] \text{ tel que } |f(x_+) - f(x_-)| > \frac{1}{n}\}.$$

1. Monter que l'ensemble des points de discontinuité de $f$, noté $J$ est donné par $J = \cup_{n\in\mathbb{N}} J(n)$.
2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de $f$ est dénombrable.
3. Est-ce le cas pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quelconque ?

**Exercice 3.** Soit $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par les parties *finies* de $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties $A \subset \mathbb{R}$ telles que $A$ est dénombrable ou $A^c$ est dénombrable.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ sont égales.
3. Comparer $\mathcal{T}$ à la tribu borélienne.
4. Soit $f$ une application injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f$ est mesurable lorsqu'on muni $\mathbb{R}$ de la tribu $\mathcal{T}$ au départ et à l'arrivée.
5. Montrer que $\mathbb{1}_{[0,1]}$ est mesurable de $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ dans $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ mais pas de $\big(\mathbb{R}, \mathcal{T}\big)$ dans $\big(\mathbb{R}, \mathcal{T}\big)$.

**Exercice 4.** Soit $A$ une partie mesurable de $\mathbb{R}$ telle que $\lambda(A \cap [a, b]) = \lambda([a, b])$ pour tout segment $[a, b]$, où $\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, $A \cap ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \neq \emptyset$.

**Exercice 5.** Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $F$ un ensemble. Soit $f : E \to F$ une fonction.

On définit $\mathcal{E}_f \subset \mathcal{P}(F)$ par

$$B \in \mathcal{E}_f \quad \text{si et seulement si} \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}_f$ est une tribu sur $F$.
2. Expliciter $\mathcal{E}_f$ lorsque $f$ est constante.

On définit $\mu_f$ sur $(F, \mathcal{E}_f)$ par

$$\mu_f(B) = \mu(f^{-1}(B))$$

3. Montrer que $\mu_f$ est une mesure sur $(F, \mathcal{E}_f)$.

Exemple : $E$ est l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la tribu des boréliens $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue $\lambda$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'application définie par $f(x) = x^2$.

4. Montrer que $[1, 4[ \in \mathcal{B}_f$.
5. Que vaut $\lambda_f([1, 4[)$ ?

L3 Calcul intégral — Corrigé du partiel du 4 novembre 2019

**Ex 1** 1) Tribu sur $E$ = partie sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathcal{P}(E)$ (ens. des parties de $E$) contenant $E$, stable par complémentaire et union dénombrable (ou par complémentaire et intersection dénombrable)

Formellement : $E \in \mathcal{E}$ ; $\forall A \subset E$, $A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c \in \mathcal{E}$ ; $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{E}$

2) Mesure sur $(E,\mathcal{E})$ = application $\mu : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ si les $A_n$ sont deux à deux disjoints

3) ex $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ ou bien $\{\emptyset, \{1,2,3,4\}\}$ ou bien ...

4) $A \mapsto \operatorname{card} A$ (le cardinal de $A$) ou bien $A \mapsto 0$ (mesure nulle) ou bien ...

**Ex 4** $A \subset \mathbb{R}$ mesurable tq $\forall [a,b]$ segment de $\mathbb{R}$, $\lambda(A \cap [a,b]) = \lambda([a,b])$

Supposons $\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon > 0$ tq $A \cap ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[ = \emptyset$ alors $A \cap [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset \{x-\varepsilon, x+\varepsilon\}$ donc $\lambda(A \cap [x-\varepsilon, x+\varepsilon]) \leq \lambda(\{x-\varepsilon, x+\varepsilon\}) = 0$

Et par ailleurs $\lambda(A \cap [x-\varepsilon, x+\varepsilon]) = \lambda([x-\varepsilon, x+\varepsilon]) = 2\varepsilon > 0$. Contradiction.

**Ex 5** 1) $f : E \to F$. $\mathcal{E}_f \subset \mathcal{P}(F)$ défini par $B \in \mathcal{E}_f \Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$

* $f^{-1}(F) = \{x \in E, f(x) \in F\} = E$. Puisque $E \in \mathcal{E}$ on a $F \in \mathcal{E}_f$
* Soit $B \in \mathcal{E}_f$ alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$ donc $f^{-1}(B)^c \in \mathcal{E}$. Or $f^{-1}(B)^c = f^{-1}(B^c)$ donc $B^c \in \mathcal{E}_f$
* Soit $(B_n) \in \mathcal{E}_f^{\mathbb{N}}$ alors $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{E}$ pour chaque $n$ donc $\bigcup_n f^{-1}(B_n) \in \mathcal{E}$. Or $\bigcup_n f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\bigcup_n B_n)$ donc $\bigcup_n f^{-1}(B_n) \in \mathcal{E}_f$

Conclusion $\mathcal{E}_f$ est une tribu sur $F$

2) Si $f$ est constante égale à $b \in F$ alors $\forall B \subset F$ : $f^{-1}(B) = E$ si $b \in B$, $f^{-1}(B) = \emptyset$ si $b \notin B$. Dans les deux cas $f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$ donc $B \in \mathcal{E}_f$

Conclusion $\mathcal{E}_f = \mathcal{P}(F)$

3) Pour $B \in \mathcal{E}_f$ on pose $\mu_f(B) = \mu(f^{-1}(B))$. On a bien $\mu_f(B) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

$\mu_f(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$

Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de $\mathcal{E}_f$ deux à deux disjoints alors $\mu_f(\bigcup_n B_n) = \mu(f^{-1}(\bigcup_n B_n)) = \mu(\bigcup_n f^{-1}(B_n))$

Or les $f^{-1}(B_n)$ sont deux à deux disjoints (car $f^{-1}(B_i \cap B_j) = f^{-1}(B_i) \cap f^{-1}(B_j)$) donc $\mu(\bigcup_n f^{-1}(B_n)) = \sum_n \mu(f^{-1}(B_n))$

Conclusion : $\mu_f$ est une mesure sur $F$.

4) $(E, \mathcal{E}, \mu) = (\mathbb{R}, \{\text{boréliens}\}, \lambda)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. On a $[1,4[ \in \mathcal{E}_f \Leftrightarrow f^{-1}([1,4[)$ est un borélien. C'est bien le cas car $f$ est continue

5) $\mu_f([1,4[) = \lambda(f^{-1}([1,4[)) = \lambda(]-2,-1] \cup [1,2[) = \lambda(]-2,-1]) + \lambda([1,2[)$ car les intervalles sont disjoints $= 1 + 1 = 2$