

Nom :

Prénom :

---

L3 MATH - TD Calcul intégral gp M-MI      Interrogation      11 décembre 2019

Durée prévue : 30mn. Documents et appareils électroniques interdits

*Chaque réponse doit être raisonnablement justifiée*

**Ex. 1.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction partout dérivable. Pour  $a > 0$  on note  $\tau_a f$  l'application  $x \mapsto \frac{f(x+a)-f(x)}{a}$ .

Montrer que pour chaque  $a > 0$  l'application  $\tau_a f$  est mesurable (pour la tribu des boréliens sur  $\mathbb{R}$ ).

En déduire que  $f'$  (la dérivée de  $f$ ) est mesurable.

**Ex. 2.** Montrer qu'on a  $\log(1+x) \geq x$  pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$ . En déduire (soigneusement) :

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(\log(1+x)) dx \leq \frac{1}{2}$$

Obtient on une majoration plus fine avec l'inégalité  $\log(1+x) \leq \log(1+\pi/3) + \frac{1}{1+\pi/3}(x-\pi/3)$  ?

Comment obtiendrait on une minoration fine de l'intégrale ?