Sur les anneaux des invariants de Dickson modulo 2

FX Dehon sous la direction de J.Lannes

octobre 1994

Introduction

Le présent article vise à montrer qu'il n'existe pas d'espace Y dont la cohomologie à coefficients $\mathbb{F}_2$ soit la sous-algèbre des invariants de la cohomologie du 2-groupe abélien élémentaire $(\mathbb{Z}/2)^n$ pour l'action canonique du groupe de ses automorphismes $Aut((\mathbb{Z}/2)^n)$ [1] , lorsque n est strictement supérieur à 4. De tels espaces étaient connus pour $n = 1, 2, 3$; un récent article de Dwyer-Wilkerson en construit un pour $n = 4$. Bien sur on pourrait toujours les construire si les colimites existaient dans la catégorie homotopique.

Le résultat n'est pas nouveau, il est d'abord du à Numm puis à Jeaneret et Sutter par des méthodes de K-théorie. La preuve proposée ici s'inscrit complètement dans l'étude par Dwyer et Wilkerson des groupes de Lie homotopiques ([4]): l'espace des lacets d'un tel espace Y qu'on peut toujours supposer 2-complet, est un groupe 2-compact de rang $n-1$ dont on peut retrouver le tore maximal avec l'action du groupe de Weyl en analysant l'espace des applications du classifiant de $V = (\mathbb{Z}/2)^{n-1}$ dans Y. Précisément la composante connexe Z dans $hom(BV, Y)$ d'un "homomorphisme injectif" de V dans ΩY s'interprète comme le classifiant du centralisateur dans ΩY des éléments d'ordre 2 du tore maximal. Le classifiant du tore maximal apparaît comme l'espace total d'un revêtement double de base Z et le groupe de Weyl est une extension E de $Aut(V)$ par $\mathbb{Z}/2$. L'action du groupe de Weyl sur le classifiant du tore maximal conduit naturellement au diagramme algébrique suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & & & GL_{n-1}(\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "\rho"] & \\
1 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[ur, "\sigma"] & GL_{n-1}(\mathbb{F}_2) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

(avec $\sigma \circ i(-1) = -I_{n-1}$, ρ étant la réduction modulo 2) sans solution lorsque n est strictement supérieur à 4.

La première partie est consacrée au calcul de la cohomologie de l'espace $hom(BV, Y)$ par les techniques du foncteur T de Lannes ([5]). Elle est suivie de la formulation algébrique de l'obstruction et de son étude. Un lemme qui sert ici à déterminer la composée $\sigma \circ i$ est placé en appendice.

Cohomologie de l'espace fonctionnel $hom(BV, Y)$

Dans toute la suite on suppose donné un espace Y 2-complet tel que $H^*Y = (H^*W)^{Aut(W)}$ où $W = (\mathbb{Z}/2)^n$ et on pose $V = (\mathbb{Z}/2)^{n-1}$. Par espace on entend un objet de la catégorie $\mathcal{S}$ des ensembles simpliciaux.

1. notée $(H^*W)^{Aut(W)}$, H^*W désignant la cohomologie du classifiant de W.

Soit X un espace, on définit le foncteur $hom(X,.) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ comme l'adjoint à droite du produit cartésien par X, *i.e.* $Hom_{\mathcal{S}}(X \times Z, Y) = Hom_{\mathcal{S}}(Z, hom(X,Y))$ pour tous Y, Z. Cette définition se mime dans la catégorie $\mathcal{K}$ des algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod (la cohomologie d'un espace est l'objet type d'une telle catégorie): pour $K \in \mathcal{K}$ graduellement fini, on définit le foncteur $(. : K)_{\mathcal{K}}$ comme l'adjoint à gauche de $K \otimes$.

On obtient une application naturelle $h_c : (H^*Y : H^*X)_{\mathcal{K}} \to H^*hom(X,Y)$ en prenant l'adjointe de $H^*Y \to H^*X \otimes H^*hom(X,Y)$ image en cohomologie de la counité de l'adjonction dans $\mathcal{S}$: $X \times hom(X,Y) \to Y$ (l'évaluation). Lorsque X est le classifiant de V, h_c est très souvent un isomorphisme.

Nous développons dans cette partie le calcul de $(H^*Y : H^*V)_{\mathcal{K}}$ en suivant le programme de [5].

1 Définition de T_V

Notons T_V le foncteur $\mathcal{K} \to \mathcal{K}, M \mapsto (M : H^*V)_{\mathcal{K}}$. On a le

Théorème: *(* cf [5]) T_V commute au produit tensoriel et est exact.

Ceci est du aux propriétés exceptionnelles de l'algèbre H^*V.

2 Application à Y où $H^*Y = (H^*W)^{Aut(W)}$

T_V est exact, donc $T_V H^*Y = (T_V H^*W)^{Aut(W)}$. On calcule d'abord $T_V H^*W$ en utilisant les deux adjonctions suivantes:

Sur la sous catégorie de $\mathcal{K}$ formées des algèbres graduellement finies, les foncteurs $N \mapsto N^0$ et $N \mapsto N^1$ à valeurs dans la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels de dimension finie admettent respectivement pour adjoint à gauche les foncteurs $V \mapsto Hom_{ens}(V', \mathbb{F}_2)$ (algèbre de Boole de spectre l'espace vectoriel dual V' de V) et $V \mapsto H^*(V')$ (algèbre symétrique de V'). En fait on a toujours pour V de dimension finie et N dans $\mathcal{K}$ quelconque les isomorphismes naturels $Hom_{\mathcal{K}}(Hom_{ens}(V', \mathbb{F}_2), N) = Hom_{Vect}(V, N^0)$ et $Hom_{\mathcal{K}}(H^*(V'), N) = Hom_{Vect}(V, N^1)$.

$T_V H^*W$ est l'algèbre instable représentant le foncteur $N \mapsto Hom_{\mathcal{K}}(H^*W, H^*V \otimes N)$. En décomposant $(H^*V \otimes N)^1 = (H^1V \otimes N^0) \oplus N^1 = (V' \otimes N^0) \oplus N^1$ on obtient:

$$\begin{aligned}
Hom_{\mathcal{K}}(H^*W, H^*V \otimes N) &= Hom_{Vect}(W', (V' \otimes N^0) \oplus N^1) \\
&= Hom_{Vect}(W', V' \otimes N^0) \times Hom_{Vect}(W', N^1) \\
&= Hom_{Vect}(W' \otimes V, N^0) \times Hom_{Vect}(W', N^1)
\end{aligned}$$

et en repassant dans $\mathcal{K}$:

$$\begin{aligned}
&= Hom_{\mathcal{K}}(Hom_{ens}(W \otimes V', \mathbb{F}_2), N) \times Hom_{\mathcal{K}}(H^*W, N) \\
&= Hom_{\mathcal{K}}(Hom_{ens}(Hom(V,W), \mathbb{F}_2) \otimes H^*W, N)
\end{aligned}$$

(par définition du produit tensoriel dans $\mathcal{K}$ et en identifiant $W \otimes V'$ avec $Hom(V,W)$)

$$= Hom_{\mathcal{K}}(Hom_{ens}(Hom(V,W), H^*W), N)$$

On identifie ainsi $T_V H^*W$ à $Hom_{ens}(Hom(V,W), H^*W)$ de façon naturelle en V et W. $T_V H^*W$ est covariant en V, contravariant en W, d'où une action à gauche de $Aut(V)$ et à droite de $Aut(W)$.

Vient le sous espace des invariants: $(T_V H^*W)^{Aut(W)} = (Hom_{ens}(Hom(V,W), H^*W))^{Aut(W)}$.

3 Action de $Aut(V)$

Si V s'injecte dans W, l'ensemble des orbites de $Hom(V,W)$ sous l'action de $Aut(W)$ s'identifie à l'ensemble des sous espaces de V via l'application:

$$\begin{array}{ccc}
Hom(V,W)/Aut(W) & \xrightarrow{\sim} & \{sev\ de\ V\} \\
[\alpha] & \longmapsto & Ker\alpha
\end{array}$$

Bien sûr $Hom(V,W)$ est réunion disjointe des orbites, lesquelles sont chacune isomorphes (comme $AutW-ens$) à un $Aut(W)/I_{\alpha_U}$ où α_U désigne un morphisme de noyau U et I_{α_U} son stabilisateur. $(Hom_{ens}(Hom(V,W),H^*W))^{Aut(W)}$ est donc isomorphe à

$$\prod_{U\subset V}(Hom_{ens}(AutW/I_{\alpha_U},H^*W))^{Aut(W)}=\prod_{U\subset V}H^*W^{I_{\alpha_U}}$$

C'est la décomposition de $T_VH^*W^{AutW}$ en produit de composantes connexes, comme on peut le constater en regardant cet isomorphisme en degré 0. $Aut(V)$ agit à droite sur $Hom(V,W)$ par composition à la source, d'où une action sur $(Hom_{ens}(Hom(V,W),H^*W))^{Aut(W)}$. Seules les orbites de α_0 et α_V sont invariantes par $Aut(V)$, c'est à dire les composantes connexes $H^*W^{I_{\alpha_0}}$ et $H^*W^{I_{\alpha_V}}$. Parce que sa cohomologie est particulièrement intéressante, c'est $H^*W^{I_{\alpha_0}}$ que nous retenons.

$AutW/I_{\alpha_0}$ s'identifie à l'orbite sous l'action de $AutW$ de α_0 dans $Hom(V,W)$. Par α_0 et le choix d'un supplémentaire dans W de $\alpha_0(V)$ on définit une inclusion de $Aut(V)$ dans $Aut(W)$ qui composée avec l'action naturelle à droite de $Aut(W)$ sur $Aut(W)/I_{\alpha_0}$ coïncide avec l'action de $Aut(V)$ sur l'orbite de α_0. Donc l'action de $Aut(V)$ sur

$$H^*W^{I_{\alpha_0}}=(Hom_{ens}(Aut(W)/I_{\alpha_0},H^*W))^{Aut(W)}$$

s'identifie à la composée de l'action à gauche de $Aut(W)$ sur $H^*W^{I_{\alpha_0}}$ définie par $\psi.u=u.\psi^{-1}$ et de l'inclusion de $Aut(V)$ dans $Aut(W)$. C'est dire que le morphisme $H^*W^{I_{\alpha_0}}\to H^*V$ induit par $\alpha_0:V\to W$ est $Aut(V)$-équivariant lorsqu'on change l'action de $Aut(V)$ sur H^*V en une action à gauche par $\varphi.u=u.\varphi^{-1}$.

H^*W est l'algèbre symétrique engendrée par W' et l'action de $AutW$ sur H^*W est induite par l'action naturelle sur W': $u.\psi={}^t\psi(u)$. Si V est de dimension $n-1$ sur $\mathbb{F}_2$ et $u_1,...,u_n$ est la base duale d'une base de $\alpha_0(V)$ complétée en une base de W il est facile de voir que les invariants sont polynomiaux en

$$\begin{cases} u_n & \\ u_j(u_j+u_n) & 1\le j\le n-1\end{cases}$$

On en déduit la suite exacte $0\to u_nH^*W^{I_{\alpha_0}}\to H^*W^{I_{\alpha_0}}\to\phi H^*V\to 0$, ϕH^*V désignant la sous algèbre de H^*V formée des carrés.

4 Retour à l'espace fonctionnel

L'ensemble des composantes connexes de l'espace $hom(BV,Y)$ s'identifie via l'application naturelle à l'ensemble

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{K}}(H^*Y,H^*V) &= Hom_{\mathcal{K}}(T_VH^*Y,\mathbb{F}_2)=Hom_{\text{Boole}}((T_VH^*Y)^0,\mathbb{F}_2)\\ &= Hom_{\text{Boole}}(Hom_{ens}(Hom(V,W)/AutW,\mathbb{F}_2),\mathbb{F}_2)\\ &= Hom(V,W)/AutW\end{aligned}$$

dans lequel vit la classe α_0. Notons $Z=hom(BV,Y,\varphi)$ resp. $T_V(H^*Y,\varphi)$ la composante connexe de $hom(BV,Y)$ resp. T_VH^*Y correspondant à la classe de α_0. $T_V(H^*Y,\varphi)=H^*W^{I_{\alpha_0}}$ est graduellement fini et libre en degré inférieur ou égal à 2 donc est isomorphe (de façon $AutV$-équivariante) à H^*Z ([5]) et on a la suite exacte (toujours $AutV$-équivariante) $0\to uH^*Z\to H^*Z\to\phi H^*V\to 0$ où u est l'image dans H^*Z de la classe $u_n\in H^*W^{I_{\alpha_0}}$. Notons que le cup-produit par u est injectif.

Construction du problème algébrique

Soit $\widetilde{Z}\xrightarrow{p}Z$ le revêtement double associé à la classe u. Appelons s l'involution de $\widetilde{Z}$. $Aut(V)$ opère fidèlement sur Z (car fidèlement sur sa cohomologie). comme il laisse invariante la classe caractéristique du revêtement, il se relève en un groupe E d'automorphismes de $\widetilde{Z}$. Deux relevés d'un même automorphisme diffèrent de s et donc E est une extension de $Aut(V)$ par $\mathbb{Z}/2$.

$H^*(\widetilde{Z};R)$ est fonctoriel en $\widetilde{Z}$ et R donc est naturellement muni d'une action de E. Observons d'abord qu'un morphisme ρ d'un anneau R dans $\mathbb{F}_2$ dont l'image par $H^*(\widetilde{Z};.)$ est épi induit un morphisme $Aut_R(H^*(\widetilde{Z};R))\xrightarrow{\rho}Aut(H^*(\widetilde{Z};\mathbb{F}_2))$ (E équivariant). D'autre par le cup produit par u est injectif donc p est surjective en cohomologie modulo 2 donc l'action de E sur $H^*(\widetilde{Z};\mathbb{F}_2)$ se factorise par $E \to Aut(V)$, d'où le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d] & Aut(V) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
& & Aut_R(H^*(\widetilde{Z};R)) \arrow[r, "\rho"] & Aut(H^*(\widetilde{Z};\mathbb{F}_2)) &
\end{tikzcd}$$

On obtient le diagramme annoncé en regardant l'action de E sur le deuxième groupe de cohomologie de $\widetilde{Z}$ à coefficient dans les entiers 2-adiques et en choisissant pour ρ la réduction modulo 2. Il faut d'abord calculer les objets intervenants.

La suite exacte de Gysin permet d'identifier $H^*(\widetilde{Z};\mathbb{F}_2)$ à ϕH^*V via α_0. $H_*(\widetilde{Z};\mathbb{Z}/2)$ est isomorphe au dual de $H^*(\widetilde{Z};\mathbb{Z}/2)$ donc est concentré en degré pair. Il en est de même de $H_*(\widetilde{Z};\mathbb{Z}/2^\alpha)$ par récurrence sur α (il suffit d'analyser la suite exacte en homologie associée à la réduction modulo 2: $0 \to \mathbb{Z}/2^{\alpha-1} \to \mathbb{Z}/2^\alpha \to \mathbb{Z}/2 \to 0$. On obtient toujours par récurrence: $H_2(\widetilde{Z};\mathbb{Z}/2^\alpha) = (\mathbb{Z}/2^\alpha)^{n-1}$. Maintenant H_* commute à la limite inductive et $H_2(\widetilde{Z};colim\mathbb{Z}/2^\alpha) = colimH_2(\widetilde{Z};\mathbb{Z}/2^\alpha) = (\mathbb{Z}/2^\infty)^{n-1}$. Enfin $\mathbb{Z}/2^\infty$ est injectif donc $Hom(.,\mathbb{Z}/2^\infty)$ commute à l'homologie, d'où: $H^*(\widetilde{Z};\mathbb{Z}_2) = H_*Hom(C_*\widetilde{Z}, Hom(\mathbb{Z}/2^\infty,\mathbb{Z}/2^\infty)) = Hom(H_*(\widetilde{Z};\mathbb{Z}/2^\infty),\mathbb{Z}/2^\infty)$ en particulier $H^2(\widetilde{Z};\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{n-1}$.

$Aut(V) \to Aut(H^2(\widetilde{Z};\mathbb{F}_2))$ étant un isomorphisme, on obtient le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& & & Aut_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2^{n-1}) \arrow[d, "\rho"] & \\
1 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[ur, "\sigma"] & Aut(V) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Reste à décider la composée $\mathbb{Z}/2 \to E \to Aut_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2^{n-1})$, c'est à dire l'image de l'involution a de $\widetilde{Z}$ en cohomologie à coefficient $\mathbb{Z}_2$. Bien sur $p \circ a = p$ et modulo 2 p^* est surjective (car le cup-produit par u est injectif) et donc a^* est l'identité. Le lemme suivant démontré en appendice permet de déterminer l'image de a en cohomologie modulo 4.

On note β le connectant de la longue suite exacte en cohomologie associé à la réduction modulo 2: $0 \to \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/4 \to \mathbb{Z}/2 \to 0$. La suite exacte de Gysin se réduit à la suite exacte $0 \to uH^*Z \to H^*Z \xrightarrow{p^*} H^*\widetilde{Z} \to 0$. Pour $x \in H^*Z$, on note $\bar{x}$ son image dans $H^*\widetilde{Z} = H^*Z/uH^*Z$. Si $\beta\bar{x} = 0$, βx s'écrit uy et la classe de $\bar{y}$ modulo $Im\beta$ ne dépend que de $\bar{x}$. On définit ainsi un morphisme $Ker\beta_{\widetilde{Z}} \to coker\beta_{\widetilde{Z}}$. On obtient un autre tel morphisme en regardant $a^* - id$ sur $0 \to coker\beta \to H^*(\widetilde{Z};\mathbb{Z}/4) \to Ker\beta \to 0$ puisque ce morphisme est trivial aux extrémités. Le lemme affirme que ces deux morphismes coïncident.

Le lemme permet de conclure: l'action de β sur H^*Z est connue, c'est celle de l'opération S_q^1 et $\beta(u_i(u_i + u)) = uu_i(u_i + u)$ donc $Ker\beta_{\widetilde{Z}} = coker\beta_{\widetilde{Z}} = H^*\widetilde{Z}$ et le premier morphisme construit dans le lemme est l'identité. On obtient $s^* - id = i\rho = 2id$ donc modulo 4 s^* est $-id$. Ce résultat s'étend à l'anneau de coefficient $\mathbb{Z}_2$: s s'écrit $id + 2(id + 2g)$, $g \in M_{n-1}(\mathbb{Z}_2)$. Maintenant s^* est une involution donc g vérifie $2(id+g)^2 = id+g$ d'où on déduit que toutes les puissances de 2 divisent $id+g$ donc $id+g = 0$ et $s^* = -id$. On a obtenu le problème algébrique.

Résolution du problème algébrique

On désire connaître la réalisabilité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & & & GL_n(\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "\rho"] & \\
1 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[ur, "\sigma"] & GL_n(\mathbb{F}_2) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

avec $\sigma \circ i(-1) = -I_n$, ρ étant la réduction modulo 2. On note $\mathbb{Z}/2$ multiplicativement et on l'identifie à son image par i dans E.

Comme $\sigma(i(-1)) \neq I_n$, σ est injective. Pour prouver l'absence de solution, l'idée est d'exhiber dans E un groupe trop gros pour tenir dans $GL_n(\mathbb{Z}_2)$. On pense aux 2-groupes abéliens élémentaires.

Remarquons d'abord qu'une extension par $\mathbb{Z}/2$ est toujours centrale donc est triviale si elle est scindée. C'est le cas si n est impair: si on note det' le déterminant sur $GL_n(\mathbb{Z}_2)$ réduit modulo 4, $Ker(det' \circ \sigma)$ est isomorphe par π à $GL_n(\mathbb{F}_2)$ ($det' : GL_n(\mathbb{Z}_2) \longrightarrow (\mathbb{Z}/4)^*$ est surjectif). Notons E' ce noyau, $GL_n(\mathbb{F}_2)$ étant parfait pour n supérieur à 2, l'image de E' dans $GL_n(\mathbb{Z}_2)$ vit en fait dans $SL_n(\mathbb{Z}_2)$ dont le 2-rang est n-1, or le 2-rang de $GL_n(\mathbb{F}_2)$ est supérieur à $(n^2-1)/4$ ce qui permet de conclure pour $n > 3$.

La même obstruction intervient dans le cas n pair: l'extension n'est plus triviale a priori mais le déterminant de $-I_n$ vaut maintenant 1 de sorte que $det \circ \sigma$ se factorise par π; mais là encore $GL_n(\mathbb{F}_2)$ étant parfait ($n > 2$), le morphisme est trivial et $\sigma(E)$ est inclus dans $SL_n(\mathbb{Z}_2)$. L'étude du 2-rang de E permet à nouveau de conclure. L'idée pour trouver un 2-sous groupe abélien élémentaire maximal (ou tout au moins grand) de E est de considérer un tel sous-groupe V dans $GL_n(\mathbb{F}_2)$ (pas forcément maximal) et d'espérer que son image réciproque par π en soit une extension triviale.

On prend pour V le sous groupe de $GL_n(\mathbb{F}_2)$:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} I_{n-1} & \begin{smallmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{smallmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cong (\mathbb{Z}/2)^{n-1}$$

$T = \pi^{-1}(V)$ sera un 2-groupe abélien élémentaire si tout les éléments de T sont d'ordre 2. On est donc amené à étudier $x \mapsto x^2, T \longrightarrow i(\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ qui est invariante par l'action par translation de $\mathbb{Z}/2$ sur E, donc passe au quotient. Notons q l'application induite sur V; $q : V \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ est quadratique. Elle peut être défini sur l'ensemble ${}_2GL_n(\mathbb{F}_2)$ des éléments d'ordre 2 de $GL_n(\mathbb{F}_2)$. cet ensemble est stable par conjugaison par les éléments de $GL_n(\mathbb{F}_2)$ et q est constante sur les classes. Or l'action (transitive) de $Aut(V)$ sur $V - \{1\}$ correspond à l'action du sous-groupe de $GL_n(\mathbb{F}_2)$:

$$G' = \{ \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right), A \in GL_{n-1}(\mathbb{F}_2) \}$$

sur V par conjugaison. q est donc constante sur $V - \{1\}$. Or puisque q est quadratique, q vérifie:

$$\forall x, y, z \quad q(xyz)q(xy)^{-1}q(xz)^{-1}q(yz)^{-1}q(x)q(y)q(z) = 1$$

Il suffit d'avoir $dim(V) \geq 3$ de sorte qu'on puisse choisir des termes dans les parenthèses distincts de 1 pour conclure $q \equiv 1$, soit $\pi^{-1}(V) \cong (\mathbb{Z}/2)^n$.

Appendice A

Démonstration du lemme.

On peut le démontrer directement au niveau des cochaînes mais nous préférons donner l'exposé plus général suivant.

Soit $\widetilde{Z} \xrightarrow{p} Z$ un revêtement double d'involution a et de classe caractéristique u. On suppose p surjective en cohomologie modulo 2 (et donc $a^* = id$) alors on peut décider l'action de a sur la cohomologie modulo 4 de $\widetilde{Z}$ lorsqu'on connaît le comportement du bockstein sur la cohomologie de Z. La raison est que le comportement comparé de a et de l'identité sur la cohomologie modulo une puissance de 2 de $\widetilde{Z}$ est intimement lié à celui des bocksteins sur la cohomologie modulo 2 du coégalisateur homotopique de a et $id : \widetilde{Z} \to \widetilde{Z}$. Or ce coégalisateur est déterminé via la classe u par le quotient homotopique de $\widetilde{Z}$ pour l'action de $\mathbb{Z}/2$ (c'est la fibre homotopique de la composée $\widetilde{Z}_{h\mathbb{Z}/2} \to B\mathbb{Z}/2 \to BS^1$). On commence par décrire la situation générale.

Soient X et Y deux espaces (non pointés) et f,g deux morphismes $X \to Y$. On peut parler de la colimite homotopique $C_{f,g}$ du diagramme $X \rightrightarrows Y$ (cf [1]). Si on substitue à Y le double cylindre $M_{f,g} = X \times [0,1] \cup_f Y \cup_g [0,1] \times X$ et à f,g les deux inclusions i_1,i_2 de X dans $M_{f,g}$ alors $C_{f,g}$ est faiblement équivalent au coégalisateur de i_1 et i_2 dans la catégorie des espaces et on a la suite exacte de complexes de chaînes:

$$0 \to C_*X \xrightarrow{i_1 - i_2} C_*M_{f,g} \to C_*(M_{f,g}, X) \to 0$$

Autrement dit, quitte à substituer par des complexes quasi isomorphes, on peut supposer la suite $0 \to C_*X \xrightarrow{f_* - g_*} C_*Y \to C_*C_{f,g} \to 0$ exacte (en fait $C_*C_{f,g}$ est le coégalisateur homotopique dans la catégorie des complexes bornés inférieurement de f_* et $g_* : C_*X \to C_*Y$).

La réduction modulo 2 conduit au diagramme à neuf complexes:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C^*(C_{f,g};\mathbb{Z}/2) \arrow[r] \arrow[d] & C^*(Y;\mathbb{Z}/2) \arrow[r, "f^*-g^*"] \arrow[d] & C^*(X;\mathbb{Z}/2) \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^*(C_{f,g};\mathbb{Z}/4) \arrow[r] \arrow[d] & C^*(Y;\mathbb{Z}/4) \arrow[r, "f^*-g^*"] \arrow[d, "\rho"] & C^*(X;\mathbb{Z}/4) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^*(C_{f,g};\mathbb{Z}/2) \arrow[r, "c"] \arrow[d] & C^*(Y;\mathbb{Z}/2) \arrow[r, "f^*-g^*"] \arrow[d] & C^*(X;\mathbb{Z}/2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Le connectant associé aux suites verticales est le bockstein β et on note ∂ le connectant horizontal (morphismes de degré 1). Les suites exactes longues associées donnent naissances aux diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & coker(f^*-g^*) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\beta_X"] & H^*(C_{f,g};\mathbb{Z}/2) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\beta"] & Ker(f^*-g^*) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_Y"] & 0 \\
0 \arrow[r] & coker(f^*-g^*) \arrow[r] & H^*(C_{f,g};\mathbb{Z}/2) \arrow[r] & Ker(f^*-g^*) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & coker(\beta_Y) & \longrightarrow & H^*(Y;\mathbb{Z}/4) & \xrightarrow{\rho} & Ker(\beta_Y) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f^*-g^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*-g^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*-g^*} & & \\
0 & \longrightarrow & coker(\beta_X) & \xrightarrow{\iota} & H^*(X;\mathbb{Z}/4) & \longrightarrow & Ker(\beta_X) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

On suppose que f^* et g^* coïncident en cohomologie modulo 2. La première suite exacte devient $0 \to H^*X \xrightarrow{\partial} H^*C_{f,g} \to H^*Y \to 0$. Avec le premier diagramme on construit une application $\tau : Ker\beta_Y \to coker\beta_X$ définie formellement par $\tau = \partial^{-1}\beta c^{-1}$. Avec le second on construit une application τ' s'écrivant formellement $\iota^{-1}(f^* - g^*)\rho^{-1}$

Affirmation: $\tau = \tau'$

Il suffit pour le montrer de vérifier que les morphismes $\partial\iota^{-1}(f^* - g^*)$ et $\beta c^{-1}\rho$ coïncident, la démonstration est très analogue à celle de l'anticommutativité de la composition des connectants qu'on trouve dans [2].

Cas du revêtement double.

Le coégalisateur homotopique de $a, id : \widetilde{Z} \to \widetilde{Z}$ est faiblement équivalent au coégalisateur dans Top de $a \circ i_1, i_0 : \widetilde{Z} \to \widetilde{Z} \times [0,1]$ c'est à dire l'espace total du fibré $\widetilde{Z} \to S^1 \times_{\mathbb{Z}/2} \widetilde{Z} \to S^1$. $S^1 \times_{\mathbb{Z}/2} \widetilde{Z}$ est aussi l'espace total du fibré S^1-principal de base Z classifié par la composée $Z \to B\mathbb{Z}/2 \to BS^1$ (où $Z \to B\mathbb{Z}/2$ classifie le revêtement double), donc ayant u^2 pour classe caractéristique réduite modulo 2. On obtient l'énoncé du lemme en observant que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccccc}
H^*\widetilde{Z} & \xrightarrow{\partial} & H^*(S^1 \times_{\mathbb{Z}/2} \widetilde{Z}) & \xrightarrow{c} & H^*\widetilde{Z} \\
\uparrow{\scriptstyle p^*} & & \uparrow{\scriptstyle \pi^*} & & \uparrow{\scriptstyle id} \\
H^*Z & \xrightarrow{u \cup .} & H^*Z & \xrightarrow{p^*} & H^*\widetilde{Z}
\end{array}$$

Si p^* est surjectif le morphisme $\partial^{-1}\beta c^{-1}$ coïncide avec $p^* u^{-1} \beta p^{*-1}$.

Références

[1] A.K. Bousfield et D.M. Kan, *Homotopy Limits, Completions, and Localizations*, Lecture Notes in Math. 304 (1972).

[2] H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press (1956).

[3] W.G. Dwyer et C.W. Wilkerson, *A New Finite Loop Space at the Prime Two*, J. Amer. Math. Soc. 6 (1993) 37-63.

[4] W.G. Dwyer et C.W. Wilkerson, *Homotopy fixed point methods for Lie groups and finite loop spaces*, Annals of math. ().

[5] J. Lannes, *Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire*, Publ. Math. IHES 75 (1992) 135-244.

[6] J.P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, Van Nostrand Math. Studies 11 (1967).

[7] G. Segal, *Classifying Spaces and Spectral Sequences*, Publ. Math. IHES 34 (1968) 105-112.